



Revue Paralia, Volume 6 (2013) pp 9.31-9.60

Palabras clave: Transporte en suspensión de los sedimentos, Perfil de la concentración, Régimen no estacionario, Depósito, Erosión, Ley de Rouse-Vanoni. © Editions Paralia CFL

Descripción no estacionaria de la distribución vertical de los sedimentos transportados en suspensión por un flujo con superficie libre, en presencia de depósito y erosión

Martín SANCHEZ¹

1. Université de Nantes, Faculté des Sciences et des Techniques,
UMR-6112 du CNRS - Planétologie et Géodynamique, 2 rue de la Houssinière,
BP 92208, 44322 Nantes cedex 3, France. *martin.sanchez@univ-nantes.fr*

Resumen:

Este estudio está basado en los resultados obtenidos de la solución numérica de una ecuación de transporte de sedimentos 1DV, los cuales han servido para desarrollar un modelo descriptivo del perfil vertical de la concentración en materias en suspensión, esto en relación con el estudio del transporte de sedimentos en los flujos con superficie libre. Para un régimen sedimentario no estacionario sin depósito y sin erosión, una primera descripción de la repartición vertical de la concentración es propuesta. Esta, que es semejante a la ecuación general del perfil de la concentración de la solución estacionaria, incluye un parámetro llamado alfa, cuyo valor tiende siempre hacia su valor teórico terminal correspondiente al régimen estacionario.

En presencia de depósito o de erosión, si las variables del problema permanecen constantes y si los intercambios sólidos con el fondo son proporcionales a la velocidad de caída de los sedimentos multiplicada por la concentración en el fondo, entonces, se constata en este estudio que el perfil de la concentración tiende hacia una forma terminal. Según el modelo retenido, la modificación de la forma del perfil de la concentración debida a los intercambios con el fondo es descrita por una función que incluye un segundo parámetro designado beta.

El modelo completo para el perfil vertical de la concentración en régimen no estacionario con erosión y depósito incluye así dos parámetros adimensionales, alfa y beta, y un parámetro dimensional que define la concentración de referencia. Un carácter estacionario de los parámetros alfa y beta es posible con erosión o depósito, lo que implica necesariamente que la concentración de referencia no es estacionaria.

Las variaciones con el tiempo de los parámetros alfa y beta son modelizados por dos ecuaciones fenomenológicas. Un buen calibramiento de las formulaciones propuestas ha permitido la obtención de un modelo estable y fiable, el cual puede ayudar a mejorar considerablemente la precisión de las modelizaciones de transporte 2DH.

*Sometido el 2 de octubre de 2013, aceptado el 28 de octubre de 2013, en línea el 6 de noviembre de 2013.
Versión traducida no certificada publicada bajo responsabilidad del autor del artículo.*

Para citar la versión original de este artículo:

SANCHEZ M. (2013). *Description non stationnaire de la distribution verticale des sédiments transportés en suspension par les écoulements à surface libre, en présence de dépôt et d'érosion*. Revue Paralia, Vol. 6, pp 9.1–9.30.

DOI:10.5150/revue-paralia.2013.009

(disponible en ligne – <http://www.paralia.fr> – available online)

1. Introducción

Con las computadoras actuales y por un costo de cálculo relativamente bajo, los modelos hidrodinámicos 2DH utilizados en los sistemas oceánicos, costeros, lacustres, estuarinos y fluviales, permiten las aplicaciones a una escala espacial fina cubriendo grandes extensiones y sobre largas duraciones.

Cuando las variables estudiadas por esos modelos pueden ser correctamente descritas verticalmente, los resultados obtenidos son muy cercanos de los de los modelos tridimensionales. Dos aplicaciones exitosas siguiendo esta metodología son: (i) los modelos de propagación del oleaje sobre fondos poco inclinados que describen la distribución vertical del potencial de velocidades con la teoría de Stokes-Airy y (ii) los modelos de corrientes de fluidos homogéneos que integran sobre toda la profundidad el efecto de los esfuerzos tangenciales sobre las velocidades medias de flujo.

Un objetivo de este artículo es la implementación en los modelos de transporte de materias en suspensión por los flujos, de una descripción precisa de la repartición vertical de sedimentos. Más allá del dominio de validez de ley de Rouse-Vanoni que ha sido obtenida para un régimen uniforme y estacionario, el modelo desarrollado puede aplicarse también en régimen no estacionario y no uniforme, cuando los intercambios sólidos con el fondo, son cuantificados con una tasa de depósito o de erosión.

Gracias a ese modelo, la concentración de referencia en el fondo puede ser conocida con el fin de evaluar correctamente la tasa de depósito o sedimentación. Ese modelo permite también el conocimiento en todo momento de la distribución vertical de las materias sólidas en suspensión, para todo uso en el que esas informaciones sean necesarias.

2. Teoría

En los problemas que nos interesan, los sedimentos finos en suspensión son transportados por los fluidos con su misma velocidad horizontal. En un flujo turbulento 3D, el valor instantáneo de la concentración local c de las materias en suspensión fluctúa alrededor de un valor medio C . La descomposición de c se escribe como sigue:

$$c = C + c' \quad (1)$$

donde c' es la parte fluctuante de la concentración. Si la difusión molecular de masa es despreciada, la concentración C en un flujo turbulento es gobernada por la ecuación de transporte siguiente (referencial $Oxyz$ con z en coordenada vertical):

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V_x \frac{\partial C}{\partial x} + V_y \frac{\partial C}{\partial y} + V_z \frac{\partial C}{\partial z} = -\frac{\partial \langle v_x' c' \rangle}{\partial x} - \frac{\partial \langle v_y' c' \rangle}{\partial y} - \frac{\partial \langle v_z' c' \rangle}{\partial z} + \frac{\partial (W C)}{\partial z} \quad (2)$$

donde W es el valor local de la velocidad de caída media de las materias en suspensión, V_x , V_y y V_z son las componentes locales de la velocidad que caracterizan el flujo turbulento medio, y los términos $\langle v_x' c' \rangle$, $\langle v_y' c' \rangle$, $\langle v_z' c' \rangle$, representan las correlaciones temporales entre las componentes de la velocidad fluctuante y la concentración fluctuante. Esos términos que traducen la transferencia de masa provocada por la

turbulencia son usualmente modelizados a través de las leyes de difusión de Fick-Boussinesq siguientes:

$$\langle v_x' c' \rangle = -K_x \frac{\partial C}{\partial x}, \quad \langle v_y' c' \rangle = -K_y \frac{\partial C}{\partial y}, \quad \langle v_z' c' \rangle = -K_z \frac{\partial C}{\partial z} \quad (3)$$

donde K_x , K_y y K_z son los coeficientes de difusión turbulenta de masa siguiendo las direcciones Ox , Oy y Oz respectivamente. La ecuación de transporte 3D modificada es:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V_x \frac{\partial C}{\partial x} + V_y \frac{\partial C}{\partial y} + V_z \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) + \frac{\partial(WC)}{\partial z} \quad (4)$$

La solución de esta ecuación debe satisfacer a una condición de frontera relativa a los intercambios de sedimentos entre el flujo y el fondo. Si el fondo se sitúa en $z=0$, en caso de una puesta en suspensión de los materiales depositados descrita por una tasa de erosión efectiva E^{ef} (termino fuente en $\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$), la condición de frontera es:

$$\left(-WC - K_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = E^{ef} \quad (5)$$

En caso de sedimentación, la condición de frontera es:

$$\left(-WC - K_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = -D^{ef} \quad (6)$$

donde D^{ef} representa la tasa de depósito efectiva (termino sumidero en $\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$) que puede ser descrita por la formulación siguiente (KRONE, 1986; METHA, 1986):

$$D^{ef} = p W_0 C_0 \quad (7)$$

donde, por un lado C_0 es la concentración de las materias en suspensión en el fondo del flujo y W_0 la velocidad de caída media de esas materias. Por otro lado, el termino p representa, según KRONE (1986), la probabilidad [0;1] que los sedimentos tocando el fondo adhieran a este. Si $p=0$ todas las partículas tocando el fondo son inmediatamente puestas en suspensión por el flujo y la tasa efectiva de depósito es nula.

Si el régimen sedimentario es uniforme y estacionario, el problema se simplifica considerablemente y la distribución vertical de C obedece a:

$$WC = -K_z \frac{\partial C}{\partial z} \quad (8)$$

La integración de esta ecuación permite la obtención de la ley de Rouse-Vanoni generalizada para la distribución vertical de las materias en suspensión en régimen estacionario (ORTON & KINEKE, 2001; SANCHEZ *et al.*, 2005):

$$C(z) \Big|_{stat} = C_0 \exp \left(- \int_0^z \frac{W}{K_z} dz \right) \quad (9)$$

La ecuación precedente admite una solución analítica dependiendo de las expresiones de K_z y de W . Algunas soluciones conocidas son presentadas en el apéndice 1 al final de este artículo. En lo que sigue, estas dos magnitudes son consideradas ser independientes

de z . Bajo estas condiciones, la expresión 9 de la concentración se puede escribir como sigue:

$$C(z^\circ)|_{stat} = C_0 \exp(-P^e z^\circ) \quad (10)$$

donde $z^\circ = z/d$ es la coordenada vertical adimensional, d la profundidad y P^e el número de Peclet característico de la convección y difusión verticales de los sedimentos:

$$P^e = \frac{W d}{K_z} \quad (11)$$

Una expresión usual para evaluar K_z es la siguiente:

$$K_z = \frac{\kappa}{6} U_c d \quad (12)$$

donde U_c es la velocidad de fricción y $\kappa=0.4$ la constante universal de Karman.

Por integración de la ecuación 10 se obtiene la expresión de la relación C_0/\bar{C} (donde \bar{C} es la concentración media sobre la vertical):

$$\frac{C_0}{\bar{C}} \Big|_{stat} = \frac{P^e}{1 - \exp(-P^e)} \quad (13)$$

La ecuación 13 podría ser utilizada en los modelos 2DH para estimar la concentración en el fondo C_0 en función de la concentración media \bar{C} . En efecto, el conocimiento de C_0 es necesario para estimar de manera fiable la tasa de depósito con la ecuación 7.

Sin embargo, según las modelizaciones hidrosedimentarias y en acuerdo con los trabajos de simulaciones numéricas efectuados por TEETER (1986), desde que la sedimentación de las materias en suspensión comienza a producirse, el valor de C_0/\bar{C} disminuye en comparación con el valor dado por la ecuación 13. Esta disminución se explica por una importante reducción de la concentración cerca del fondo, como lo ilustra la figura 1. Una formulación de TEETER (1986) que permite de calcular C_0/\bar{C} en los modelos actuales (LUMBORG & WINDELIN, 2003) se escribe como sigue:

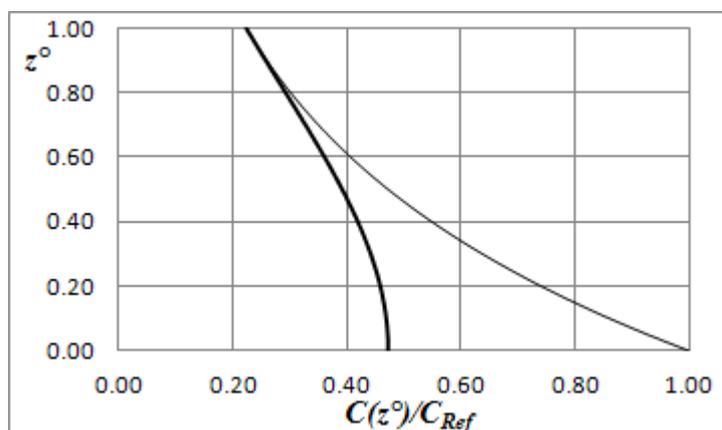


Figura 1. Ilustración de la modificación del perfil vertical de la concentración provocada por la sedimentación. En línea fina: ley estacionaria. En línea gruesa: perfil observado durante un período de depósito ($z^\circ=0$ =fondo; $z^\circ=1$ =superficie).

$$\frac{C_0}{C} \approx 1 + \frac{P^e}{1.25 + 4.75 p^{2.5}} \quad (14)$$

Estudios sobre el transporte de sedimentos no cohesivos muestran que cuando el número de Peclet es superior a un umbral P^e_{cr} cuyo valor está comprendido entre 9 y 15 el transporte en suspensión ya no puede producirse (TEETER, 1986). Ese criterio debe poder aplicarse también a los sedimentos finos cuando el valor del número de Peclet permanece inferior a este valor crítico un tiempo suficientemente largo en comparación a la duración necesaria para que las partículas en suspensión se depositen.

3. Métodos

Con el fin de comprender el comportamiento dinámico de los sedimentos en la columna de agua, un modelo numérico 1DV ha sido implementado. Este es gobernado por la ecuación siguiente:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\kappa}{6} U_c d \frac{\partial C}{\partial z} + WC \right) \quad (15)$$

Las simulaciones han sido efectuadas con una gran variedad de valores de las variables del problema cubriendo la mayoría de los casos reales de transporte de sedimentos finos en los flujos costeros y estuarinos. Durante esas simulaciones se han combinado diferentes valores de las variables, entre los cuales se pueden citar:

- 8 valores de d (en m): 0.25; 0.5; 1; 2; 4; 8; 16 y 32.
- 6 valores de W (en mm s^{-1}): 0.05; 0.1; 0.2; 0.4; 0.8 y 1.6.
- Valores de U_c (en m s^{-1}) variables comprendidas entre 0.00002 y 0.3.

El modelo numérico descompone la columna de agua en N capas de espesor adimensional constante igual a $\Delta z^\circ = \Delta z/d = 1/N$. En la mayoría de los casos N ha sido fijado a 50, pero en algunos casos particulares se utilizó $N=100$. En cada instante t de la modelización, se conoce la concentración C_i en el medio de cada capa i de la columna de agua situado con respecto al fondo en el nivel adimensional $z_i^\circ = (i-1/2)\Delta z^\circ$.

3.1 Régimen no estacionario sin erosión y sin depósito

Las primeras simulaciones han sido efectuadas con una velocidad de fricción variable cíclicamente en acuerdo con la expresión siguiente:

$$U_c = U_{c-moy} [1 + Ampl \times \cos(\omega t)] \quad (16)$$

donde U_{c-moy} es la velocidad de fricción media de la simulación, $Ampl$ un parámetro que define la importancia de las oscilaciones del valor de U_c y $\omega = 2\pi/T$ la pulsación que está relacionada con el período T de las oscilaciones.

Para la mayoría de las simulaciones, el parámetro $Ampl$ ha sido fijado a 0.80 (excepto en ciertos casos cuando su valor es indicado) y el período T a 22320 s, lo que es la mitad del valor teórico del período de la marea semidiurna. Para el parámetro U_{c-moy} (en m s^{-1}) los 4 valores siguientes han sido estudiados: 0.01; 0.02; 0.04 y 0.08.

3.1.1 Descripción del perfil vertical de la concentración sin erosión y sin depósito

Los primeros resultados obtenidos han mostrado que el perfil vertical de la concentración permanecía, en la mayoría de los casos, cercano de una ley exponencial. Sin embargo cabe indicar que esos perfiles no están en conformidad exacta con esta ley. Con el objetivo de calibrar a cada instante t de la modelización, una ley exponencial aproximando el perfil de la concentración, el criterio de mínimos cuadrados ha sido utilizado. Según este método, si una variable Y está linealmente vinculada con una variable X , y que $\hat{Y} = A + BX$ representa la mejor aproximación de Y calibrada en conformidad con ese criterio, entonces los parámetros A y B son dados por:

$$A = \frac{N \sum_{i=1}^N X_i Y_i - \sum_{i=1}^N X_i \sum_{i=1}^N Y_i}{N \sum_{i=1}^N X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N X_i \right)^2} \quad (17)$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N X_i^2 \sum_{i=1}^N Y_i - \sum_{i=1}^N X_i Y_i \sum_{i=1}^N X_i}{N \sum_{i=1}^N X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N X_i \right)^2} \quad (18)$$

donde X_i y Y_i son las parejas asociadas de valores experimentales de esas variables y N el número total de esas parejas.

Si el perfil vertical de la concentración es aproximado por la ley siguiente:

$$\hat{C}(z^\circ) = \hat{c} \exp(-\hat{\alpha} z^\circ) \quad (19)$$

donde \hat{c} es una concentración de referencia y $\hat{\alpha}$ el parámetro de la ley, entonces, el problema es linealizado cambiando las variables como sigue: $X_i = z^\circ_i$, y $Y_i = \ln(C_i)$. En ese caso los parámetros de la ley son dados por: $\hat{\alpha} = -A$, y $\hat{c} = \exp(B)$.

3.1.2 Caracterización del error entre la ley exponencial calibrada y el perfil vertical de la concentración según el modelo 1DV

El error relativo vinculado con la estimación de C_i por \hat{C} , es definido como sigue:

$$\hat{e}(z^\circ) = \frac{\hat{C}(z^\circ) - C_i(z^\circ)}{C_i(z^\circ)} \quad (20)$$

A cada instante de la simulación, la función $\hat{e}(z^\circ)$ puede ser evaluada a partir de los valores de $C_i(z^\circ)$ obtenidos del modelo numérico 1DV y de los valores calibrados de los parámetros \hat{c} y $\hat{\alpha}$.

3.2 Régimen no estacionario considerando el depósito y la erosión

Simulaciones del modelo numérico 1DV con depósito y/o erosión han sido efectuadas combinando los valores de las magnitudes del problema antes mencionadas.

Los ensayos numéricos de depósito han sido efectuados con los valores siguientes del parámetro p de la ley de Krone (ecuación 7): 0.125; 0.25; 0.5 y 1.

Para caracterizar la puesta en suspensión de los sedimentos, una tasa de erosión adimensional q se definió como sigue:

$$q = \frac{E^{ef}}{W_0 C_0} \quad (21)$$

Los valores estudiados del parámetro q son: 0.125; 0.25; 0.5; 1; 2; 4; 8 y 16.

Un número reducido de simulaciones fueron efectuadas fijando el valor de $E^{ef}/(W_{init} \times C_{init})$, donde W_{init} y C_{init} designan los valores iniciales (en $t=0$) de las variables W y C respectivamente.

4. Resultados de las simulaciones numéricas 1DV e implementación de un modelo fenomenológico

4.1 Transporte sedimentario sin depósito y sin erosión

4.1.1 Error relativo local propio a la ley exponencial calibrada para describir el perfil vertical de la concentración

Los resultados examinados corresponden a una variación de U_c conforme a la ecuación 16, con valores variables de las magnitudes U_{c-moy} , W y d .

El estudio de la función $\hat{e}(z^\circ)$ característica del error relativo propio a la aproximación del valor de C_i resultando del modelo teórico 1DV, por la ecuación de \hat{C} según la ley ajustada, muestra que en todos los casos los perfiles de $\hat{e}(z^\circ)$ permanecen semejantes (figura 2). El máximo de $|\hat{e}|$ es siempre observado en el fondo (en $z^\circ=0$). El signo de \hat{e} en la superficie es siempre contrario al del fondo. El perfil vertical del error relativo pasa sistemáticamente 3 veces por $\hat{e}=0$. A pesar que los niveles z° de esos puntos varían ligeramente de un caso a otro, se pueden mencionar los valores siguientes:

- Intersección superior: $z^\circ \approx 0.90$
- Intersección intermedia: $z^\circ \approx 0.51$
- Intersección inferior: $z^\circ \approx 0.12$

El estudio del error relativo permitió realizar la figura 3 con 51840 valores de $\hat{e}(z^\circ=0)$ correspondientes a la combinación de diferentes valores de las magnitudes físicas del problema. En 90% de los casos estudiados el valor absoluto de $\hat{e}(z^\circ=0)$ es inferior a 0.03 y en 99% de los casos inferior a 0.23. Sin embargo, en ciertos casos los valores máximos de $|\hat{e}(z^\circ=0)|$ han sobrepasado un valor de 0.40. Se ha constatado que los errores máximos corresponden a los mayores valores del número de Peclet que alcanzan en las simulaciones un valor de 12. Cabe indicar que esos valores del número de Peclet, son superiores al valor crítico P_{cr}^e arriba del cual el transporte en suspensión ya no puede producirse, lo que implica un depósito de los sedimentos que no es permitido en esta primera serie de modelizaciones.

Una correlación muy estrecha une los valores instantáneos de $\hat{\epsilon}(z^{\circ}=0)$ con algunas magnitudes características del problema (ver figura 3). La ley siguiente ha sido ajustada (se debe señalar que esta ley sobrestima el error para los grandes valores de $d\hat{\alpha}/dt$):

$$\hat{\epsilon}(0)_{estim} \approx -0.108 \frac{d}{U_c} \frac{d\hat{\alpha}}{dt} \quad (22)$$

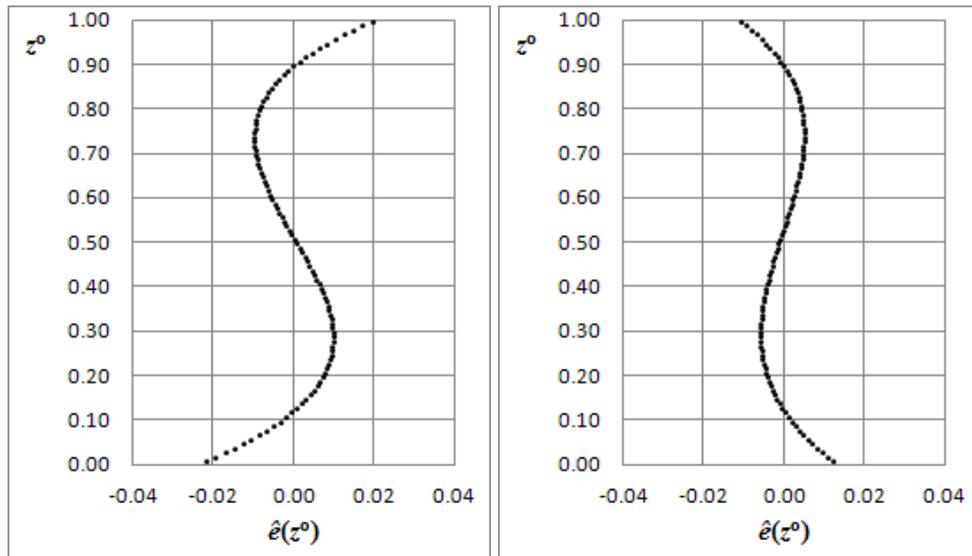


Figura 2. Ejemplo de dos perfiles verticales de $\hat{\epsilon}(z^{\circ})$ correspondientes a los errores máximos constatados en el caso estudiado definido por:

$$U_{c-moy}=0.02 \text{ m s}^{-1}; W = 0.0002 \text{ m s}^{-1} \text{ y } d = 8 \text{ m}.$$

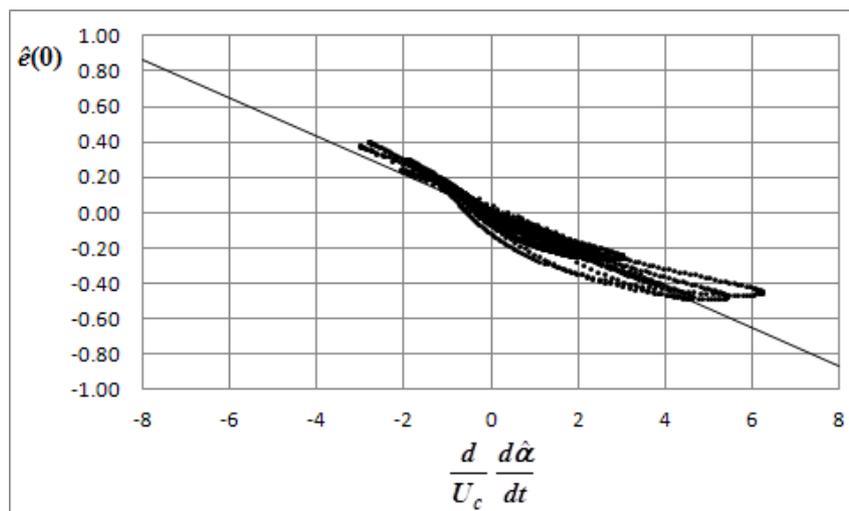


Figura 3. Correlación entre $\hat{\epsilon}(z^{\circ}=0)$ y $(d/U_c) \times d\hat{\alpha}/dt$ según los resultados de las modelizaciones numéricas 1DV (la figura contiene 51840 puntos experimentales).

En razón del fuerte coeficiente de correlación que justifica la ecuación 22, ésta podría ser considerada en un modelo para mejorar su precisión. Sin embargo, como los valores

extremos de $\hat{e}(z^{\circ}=0)$ son observados con condiciones de depósito muy claras, esta posibilidad no ha sido retenida en este estudio debido a que la modelización del transporte sedimentario sin depósito y sin erosión tiene muy poco interés práctico.

Se observa que un valor positivo de $d\hat{\alpha}/dt$, que corresponde a una etapa de aumento de la concentración en el fondo y de baja en la superficie, se acompaña de un valor negativo de $\hat{e}(z^{\circ}=0)$, el cual indica que en fondo, el valor de \hat{C} según la ley ajustada es inferior a la concentración C_i evaluada con el modelo teórico 1DV.

4.1.2 Modelización del perfil vertical de la concentración en régimen no estacionario sin depósito y sin erosión

Después de verificar, que en semejanza con las ecuaciones 10 y 19, la relación C/C_0 puede ser modelizada correctamente por una función $F(z^{\circ};\alpha)=\exp(-\alpha z^{\circ})$, un modelo fenomenológico es utilizado para describir el perfil vertical de la concentración en régimen no estacionario sin depósito y sin erosión. Este modelo se escribe como sigue:

$$\tilde{C}(z^{\circ}) = \tilde{c} \exp(-\tilde{\alpha} z^{\circ}) \quad (23)$$

donde \tilde{c} es la concentración de referencia en el fondo y $\tilde{\alpha}$ el parámetro del modelo (mientras más pequeño es el parámetro $\tilde{\alpha}$, más uniforme es la distribución de los sedimentos en la columna de agua).

Las curvas de $\hat{\alpha}$ y P^e en función del tiempo muestran que en todos los casos estudiados la señal $\hat{\alpha}(t)$ tiene un retardo de fase sobre $P^e(t)$. En todo instante t , el valor de $\hat{\alpha}$ tiende hacia el valor de P^e (figura 4). También se constata que el máximo y el mínimo de la señal de $\hat{\alpha}$ corresponden a los instantes en los que las dos señales se cruzan. Además, el análisis de los resultados muestra que el desfase depende esencialmente del valor de U_c/d . Con base en estas observaciones el modelo retenido para simular la variación en el tiempo de $\tilde{\alpha}$ es la siguiente:

$$\frac{d\tilde{\alpha}}{dt} = c_{\alpha} \frac{U_c}{d} (\alpha_{\infty} - \tilde{\alpha}) \quad (24)$$

donde $\alpha_{\infty}=P^e$ es el valor terminal del parámetro $\tilde{\alpha}$ en régimen estacionario y c_{α} un coeficiente del modelo. Los resultados numéricos del modelo 1DV confirman la validez de esta ecuación y permiten la evaluación de $c_{\alpha} \approx 0.667$.

Una expresión equivalente a la ecuación 23 fue utilizada por BELINSKY *et al.* (2005) para estudiar el proceso de carga, provocado por una erosión del fondo, de una columna de agua de profundidad $d \rightarrow \infty$. Admitiendo la existencia de un valor final de saturación para C_0 , obtienen un modelo un poco diferente del definido por la ecuación 24.

La figura 4 que es un ejemplo de los resultados obtenidos, muestra las variaciones temporales: (i) de U_c (en dm s^{-1}), (ii) de P^e , (iii) del parámetro $\hat{\alpha}$ evaluado a partir de los resultados obtenidos con el modelo 1DV a través la calibración conforme a la técnica de mínimos cuadrados, y (iv) del parámetro $\tilde{\alpha}$ obtenido a partir de la ecuación 24 resuelta numéricamente con el método *predictor-corrector* de Runge-Kutta. En

complemento, esta figura muestra el parámetro $\hat{e}(z^{\circ}=0)$ evaluado experimentalmente de un lado y estimado con la función empírica definida por la ecuación 22 de otro lado. Les desfases más importantes entre las señales $P^e(t)$ y $\hat{\alpha}(t)$ han sido observados con $d=32$ m y $U_{c-moy}=0.01$ m s⁻¹ que son dos valores estudiados extremos opuestos de esas dos magnitudes. Las curvas de la figura 5 corresponden a ese caso. En razón del fuerte valor de d/U_c los valores máximos constatados de $\hat{e}(z^{\circ}=0)$ son aquí muy elevados y coinciden siempre con los valores extremos de P^e .

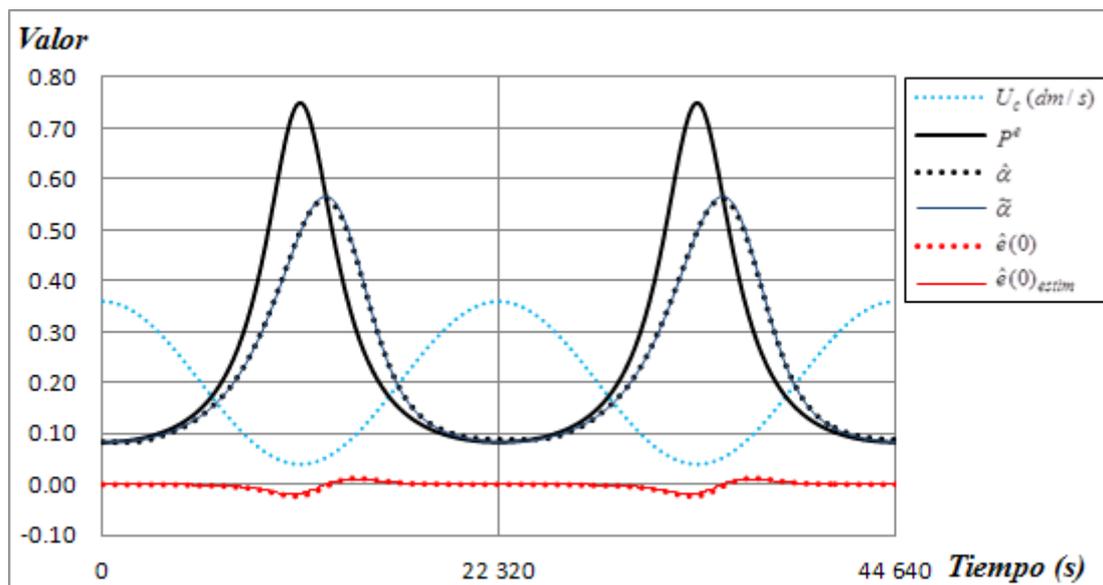
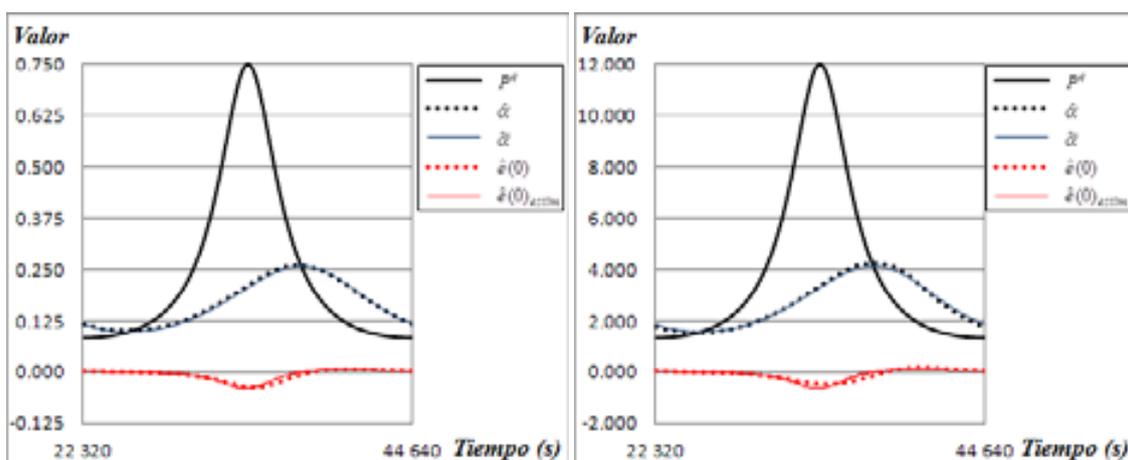


Figura 4. Resultados de validación del modelo fenomenológico en régimen no estacionario, sin erosión y sin depósito, correspondiente al caso estudiado definido por: $U_{c-moy}=0.02$ m s⁻¹; $W = 0.0002$ m s⁻¹ y $d = 8$ m.



a) $W = 0.0001$ m s⁻¹

b) $W = 0.0016$ m s⁻¹

Figura 5. Resultados del estudio en régimen no estacionario, sin erosión y sin depósito, de dos casos definidos por: $U_{c-moy}=0.01$ m s⁻¹ y $d = 32$ m.

La figura 5a corresponde a una velocidad de caída $W=0.0001 \text{ m s}^{-1}$ y la figura 5b a $W=0.0016 \text{ m s}^{-1}$. Entre esos dos casos el cociente $\hat{\alpha}(t)/P^e$ permanece prácticamente idéntico bien que con una pequeña diferencia que implica que el coeficiente c_α es ligeramente influenciado por el valor de $\hat{\alpha}$ cuando este último es elevado y tiene un valor del mismo orden de importancia que P^e_{cr} . Esta dependencia es despreciada en este estudio para los valores examinados de las variables del problema.

Para valores de U_{c-moy}/d superiores a aproximadamente 0.02 el desfase entre las señales $P^e(t)$ y $\hat{\alpha}(t)$ es despreciable, salvo en la vecindad temporal del máximo del número de Peclet (figura 6).

De hecho, en un sistema costero, el máximo del número de Peclet es observado durante los cambios de dirección de la corriente de marea cuando U_c puede tener valores cercanos a cero. Así, en el transcurso de un ciclo de marea el régimen sedimentario puede ser considerado estacionario durante una parte del tiempo y no estacionario durante la parte complementaria de ese ciclo. En la medida que la señal U_c impuesta en las simulaciones tienen un período $T=22320 \text{ s}$ (lo que es representativo de las ondas de marea simidiurnas de un período de 44640 s), se puede proponer el criterio siguiente para determinar si el régimen sedimentario en un sistema natural dado es estacionario o no estacionario, en un momento dado:

$$\text{Si : } \frac{U_c \times T}{d} \gg 500, \text{ el régimen sedimentario es casi estacionario} \quad (25)$$

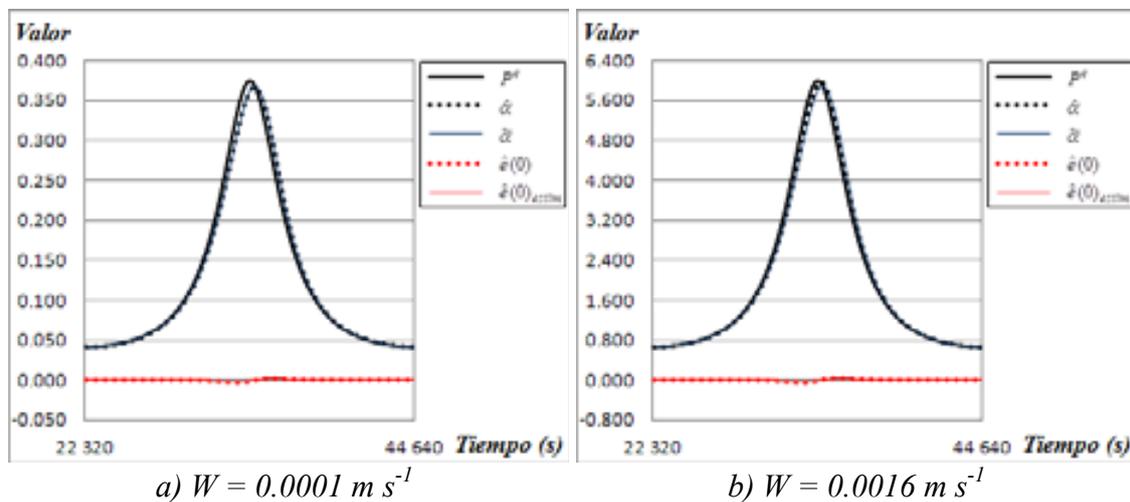


Figura 6. Resultados del estudio en régimen no estacionario, sin erosión y sin depósito, de dos casos definidos por: $U_{c-moy}=0.02 \text{ m s}^{-1}$ y $d = 1 \text{ m}$.

Con el objetivo de explorar la robustez del modelo fenomenológico, una serie de simulaciones ha sido efectuada incluyendo valores $U_c \rightarrow 0$ para los cuales $P^e \rightarrow \infty$. En esa serie se impuso una velocidad de caída $W=0.0002 \text{ m s}^{-1}$ y una variación de la velocidad de fricción caracterizada por $U_{c-moy}=0.02 \text{ m s}^{-1}$ y $Ampl=0.999$, de suerte que durante la

simulación, el valor mínimo de U_c es de $2 \times 10^{-5} \text{ m s}^{-1}$ y el valor máximo asociado del número de Peclet vale 150. Los resultados correspondientes, presentados en la figura 7, muestran la validez del modelo fenomenológico en este caso extremo. Estos resultados confirman igualmente la dependencia del coeficiente c_α del modelo fenomenológico respecto al valor de $\hat{\alpha}$. En efecto, parece que para los fuertes valores de $\hat{\alpha}$, el valor del coeficiente c_α aumenta ligeramente. Esta dependencia es ignorada en este estudio.

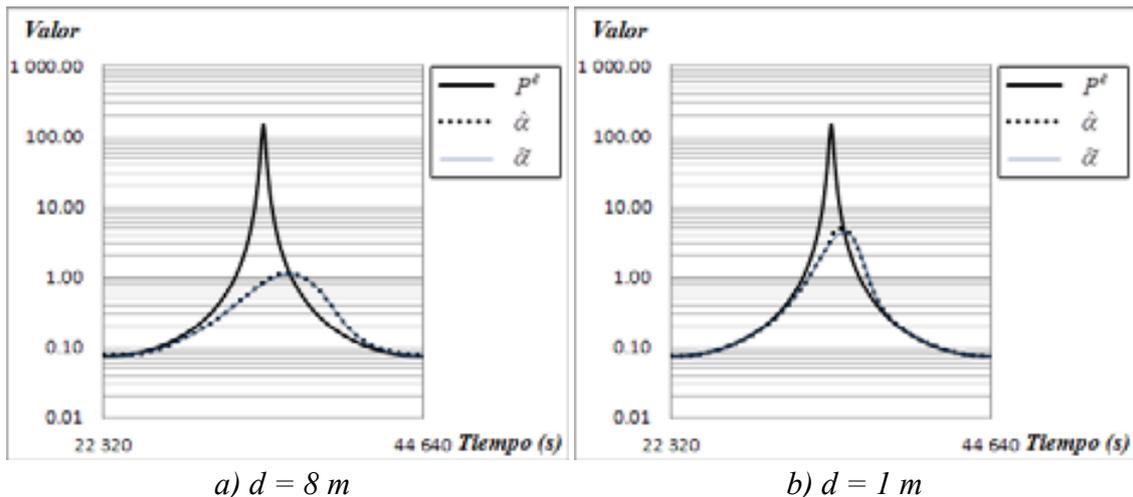


Figura 7. Resultados del estudio en régimen no estacionario, sin erosión y sin depósito, de dos casos definidos por: $W=0.0002 \text{ m s}^{-1}$, $U_{c\text{-moy}}=0.02 \text{ m s}^{-1}$ y $Ampl=0.999$.

El modelo fenomenológico de variación de $\tilde{\alpha}$ permanece estable cuando $U_c=0$ porque en ese caso extremo la ecuación 24 se convierte en:

$$\frac{d\tilde{\alpha}}{dt} = c_\alpha \left(\frac{6W}{\kappa d} \right), \text{ si } : U_c = 0 \quad (26)$$

A pesar de que el modelo es estable cuando $U_c=0$, se debe indicar que durante el lapso de tiempo que esta condición persiste, los sedimentos están en caída libre sin difusión turbulenta, de suerte que la forma real de los perfiles verticales de las materias en suspensión, se aleja progresivamente de la ley exponencial, y esto puede acentuarse si ese lapso de tiempo es largo.

En razón de la condición sin depósito impuesta que es irrealista para $U_c=0$, los sedimentos muestran una tendencia, según las simulaciones 1DV, a acumularse en las capas inferiores de la columna de agua, lo que se acompaña, de acuerdo con la ecuación 26, de un crecimiento de los valores evaluados del parámetro $\tilde{\alpha}$.

4.2 Transporte sedimentario con erosión y depósito

El depósito y la erosión provocan una modificación del perfil vertical de la concentración que es generalmente más importante que la debida al carácter no estacionario del régimen sedimentario dependiendo exclusivamente de las fluctuaciones

de las variables hidrosedimentarias. Los efectos de esos dos intercambios de sedimentos entre el fondo y el flujo, son presentados en lo que sigue.

4.2.1 Descripción del perfil vertical de la concentración en régimen no estacionario en presencia de sedimentación

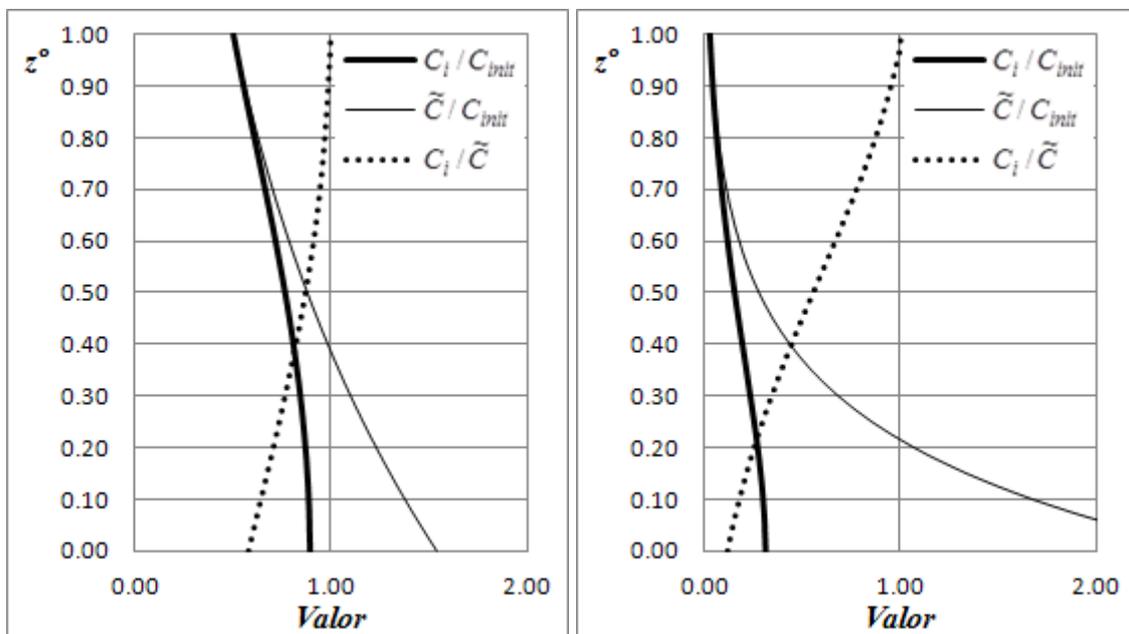
La búsqueda de una descripción del perfil vertical de la concentración en régimen no estacionario con depósito, está basada en los resultados del modelo numérico 1DV combinando los diferentes valores estudiados de las magnitudes U_{c-moy} , W y d .

Las simulaciones examinadas han sido efectuadas con los valores siguientes del parámetro p de la ley de depósito de Krone (ecuación 7): 0.125; 0.25; 0.5 y 1.

La primera parte de este trabajo de investigación consiste en examinar los valores de $C_i(z^\circ)/\tilde{C}(z^\circ)$ a partir de los resultados del modelo numérico 1DV en régimen no estacionario con depósito (figura 8). Se ha constatado que en la mayoría de los casos ese cociente puede ser descrito por una ley exponencial $G(z^\circ;\beta)=\exp(-\beta(1-z^\circ)^2)$. Por esta razón, el modelo fenomenológico completo que ha sido retenido se escribe como sigue:

$$C(z^\circ) = C_R \exp(-\alpha z^\circ) \exp(-\beta(1-z^\circ)^2) \quad (27)$$

donde C_R es una concentración de referencia y β un parámetro del modelo que depende de las variables del problema. El objetivo es que la diferencia entre $C(z^\circ)$ y $C_i(z^\circ)$, sea nula o la más pequeña posible.



a) $P^e=0.98$; $p=1$; $d=8$ m; $W=0.0004$ m s⁻¹

b) $P^e=3.9$; $p=1$; $d=8$ m; $W=0.0016$ m s⁻¹

Figura 8. Ejemplos de los perfiles verticales de la relación $C_i(z^\circ)/\tilde{C}(z^\circ)$ evaluada a partir de los resultados del modelo numérico 1DV con sedimentación (C_i), y del modelo fenomenológico calibrado en régimen no estacionario sin erosión y sin depósito (\tilde{C}).

Estando dado que $\alpha = \tilde{\alpha}$, el valor experimental de la concentración de referencia es calculado como sigue a partir del valor de la concentración en la superficie obtenida del modelo numérico 1DV:

$$C_R = \frac{C_{i=N+1/2}(z^o = 1)}{\exp(-\alpha)} = \frac{1.5 C_{i=N} - 0.5 C_{i=N-1}}{\exp(-\alpha)} \quad (28)$$

Los valores teóricos de $G_i(z^o)$ son determinados como sigue:

$$G_i(z^o) = \frac{C_i(z^o)}{C_R \exp(-\alpha z^o)} \quad (29)$$

Finalmente, el valor experimental de $\hat{\beta}$ ha sido obtenido ajustando con la técnica de mínimos cuadrados la función $\hat{G}(z^o) = \exp(-\hat{\beta}(1 - z^o)^2)$:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^N (1 - z_i^o)^2 \ln(G_i)}{\sum_{i=1}^N (1 - z_i^o)^4} \quad (30)$$

Se ha constatado que un valor estacionario terminal β_∞ puede ser determinado para el parámetro $\hat{\beta}$ si las variables independientes del problema (U_c , W y d) permanecen constantes, bajo condición que el parámetro p de la ley de depósito de Krone (ecuación 7) permanezca también constante. En esas condiciones, el depósito provoca una reducción progresiva de la concentración de las materias en suspensión pero un carácter estacionario es observado para el parámetro $\hat{\beta}$.

Las simulaciones del modelo numérico 1DV con etapas de depósito impuestas por períodos, muestra que en todos los casos el valor de $\hat{\beta}$ tiende hacia un valor terminal β_∞ (ver figuras 9 y 10).

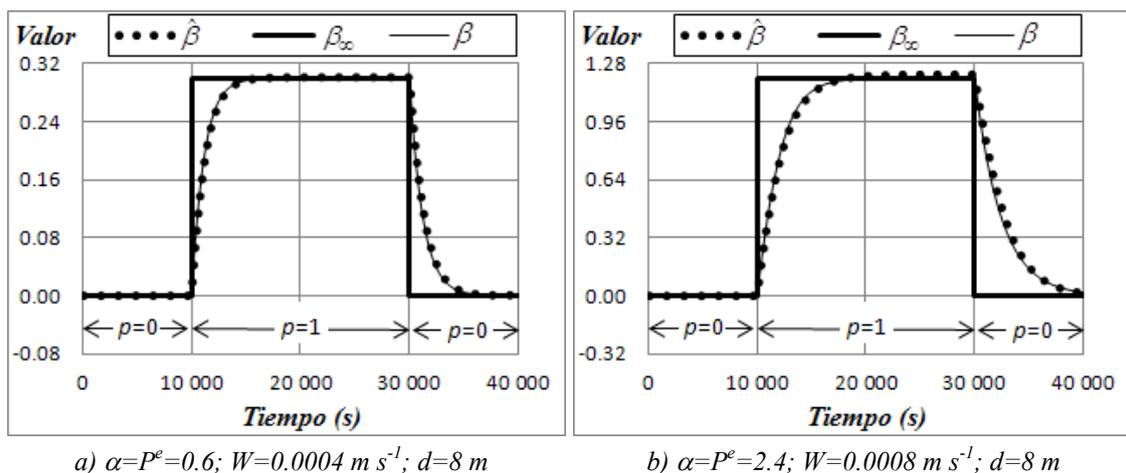
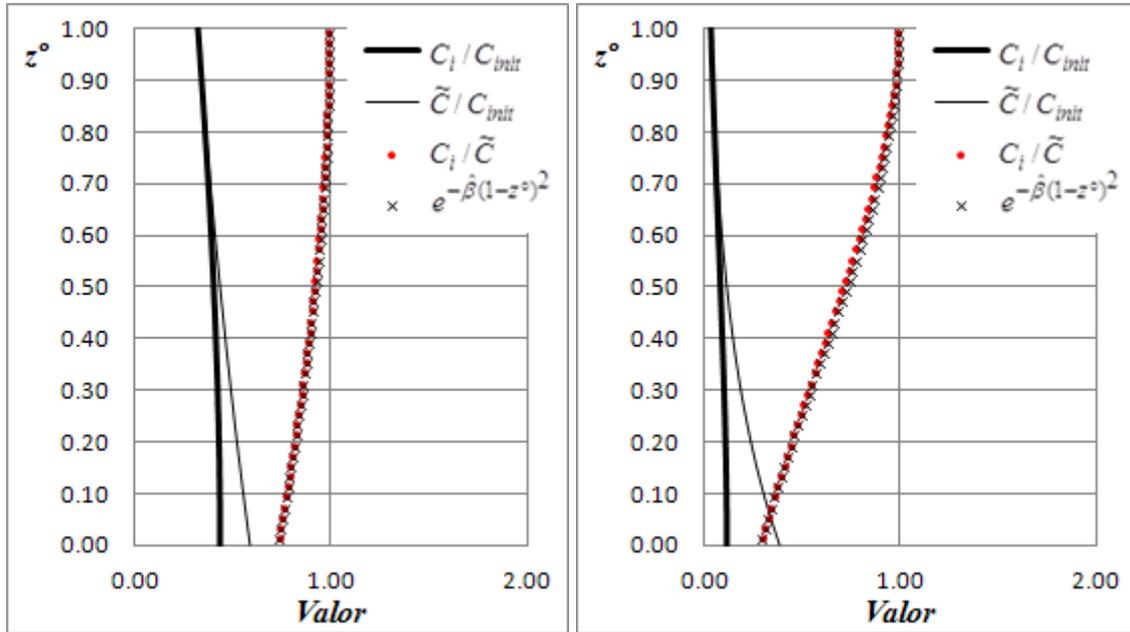


Figura 9. Resultados de las simulaciones numéricas 1DV en régimen no estacionario con depósito, representados por los valores de $\hat{\beta}$. Evolución de $\beta_\infty = 0.5p\alpha$, según la ley calibrada de ese parámetro y variación de β en acuerdo con el modelo fenomenológico definido por la ecuación 31 resuelta con el método predictor-corrector de Runge-Kutta.



a) $\alpha=P^e=0.6; p=1; W=0.0004 \text{ m s}^{-1}; d=8 \text{ m}$

b) $\alpha=P^e=2.4; p=1; W=0.0008 \text{ m s}^{-1}; d=8 \text{ m}$

Figura 10. Resultados de las simulaciones numéricas 1DV en régimen no estacionario con depósito, representados por un perfil de C_i/C_{init} . Perfil instantáneo de \tilde{C}/C_{init} según el modelo fenomenológico sin depósito y sin erosión. Relación C_i/\tilde{C} y función $\hat{G}(z^o) = \exp(-\hat{\beta}(1-z^o)^2)$ calibrada a partir de esta última.

Las simulaciones con depósito por etapas han permitido la evaluación en función de las variables del problema del parámetro β_∞ correspondientes a los valores estacionarios terminales del parámetro $\hat{\beta}$. La figura 11 muestra que β_∞ puede ser vinculada con los parámetros p y α , por: $\beta_\infty=0.5 p \alpha$.

De la misma manera que para el parámetro $\tilde{\alpha}$ correspondiente a un régimen no estacionario sin depósito y sin erosión, el análisis de los resultados muestra que el desfase entre $\beta(t)$ y $\beta_\infty(t)$ depende principalmente de U_c/d . En base a esta observación el modelo retenido para simular la variación temporal de β es el siguiente:

$$\frac{d\beta}{dt} = c_\beta \frac{U_c}{d} (\beta_\infty - \beta) \quad (31)$$

donde c_β es un coeficiente del modelo que puede ser evaluado a partir de las curvas de $\hat{\beta}(t)$ obtenidas del modelo numérico 1DV con depósito por etapas (ver figura 9). Los valores retenidos para ese coeficiente son:

$$c_\beta = \begin{cases} 0.667 + 0.3 \times \beta & , \text{ si : } D^{ef} > 0 \\ 0.667 & , \text{ si : } D^{ef} = 0 \end{cases} \quad (32)$$

Es interesante hacer notar que en régimen estacionario terminal para los parámetros α y β , el modelo fenomenológico desarrollado en este estudio se escribe como sigue:

$$C(z^o)|_{\alpha_\infty, \beta_\infty(p, \alpha)} \approx C_R \exp(-P^e z^o) \exp(-0.5 p P^e (1-z^o)^2) \quad (33)$$

Así, esta aproximación del perfil vertical de la concentración es compatible con las condiciones de frontera del problema en el fondo ($z=0$) y en la superficie ($z=d$):

$$\left(-W C|_{\alpha_{\infty}, \beta_{\infty}(p, \alpha)} - K_z \frac{\partial C|_{\alpha_{\infty}, \beta_{\infty}(p, \alpha)}}{\partial z} \right)_{z=0} = \left(-p W C|_{\alpha_{\infty}, \beta_{\infty}(p, \alpha)} \right)_{z=0} \quad (34a)$$

$$\left(-W C|_{\alpha_{\infty}, \beta_{\infty}(p, \alpha)} - K_z \frac{\partial C|_{\alpha_{\infty}, \beta_{\infty}(p, \alpha)}}{\partial z} \right)_{z=d} = 0 \quad (34b)$$

Sin embargo, se debe indicar que cuando los parámetros α y β no son estacionarios, estas condiciones de frontera no son satisfechas rigurosamente, de suerte que en esos casos el modelo comporta una incertidumbre que puede ser estudiada por los errores intrínsecos a los resultados del modelo fenomenológico. El estudio de esos errores se hará en la sección 4.2.3 con depósito y erosión durante una misma simulación.

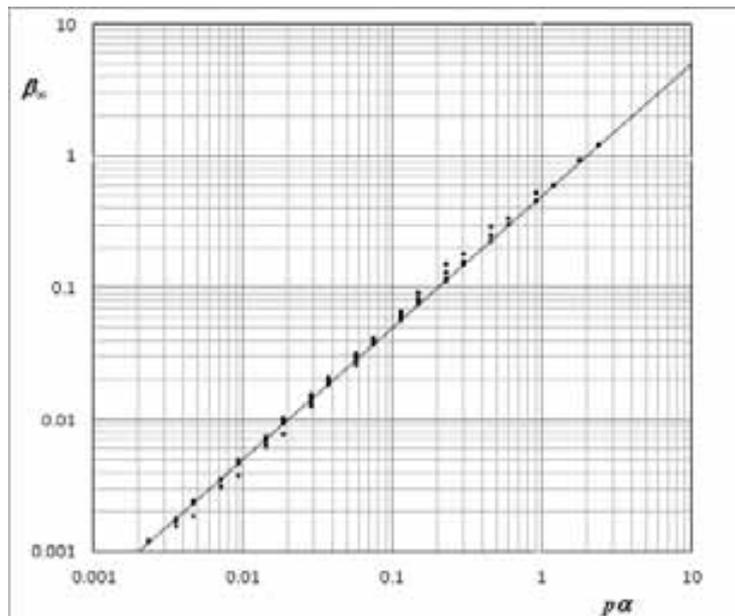


Figura 11. Correlación entre el parámetro β_{∞} y el producto $p \times \alpha$ (516 puntos experimentales).

La línea continua corresponde a la ley calibrada $\beta_{\infty} = 0.5 p \alpha$.

4.2.2 Descripción del perfil vertical de la concentración en régimen no estacionario en presencia de erosión

El parámetro β considerando el efecto del depósito sobre el perfil vertical de la concentración también sirve para considerar el efecto de la erosión. Se constata que en este caso el valor estacionario terminal β_{∞} puede ser determinado para el parámetro $\hat{\beta}$ si las variables independientes del problema (U_c , W y d) permanecen constantes, a condición que un parámetro definido por $q = E^{ef} / (C_0 W_0)$ permanezca igualmente constante.

Es necesario señalar que esta última condición no es "natural" en los procesos sedimentarios porque en general E^{ef} es independiente de C_0W_0 . En efecto, se admite que la tasa de erosión efectiva E^{ef} depende principalmente de los esfuerzos hidrodinámicos erosivos y de la resistencia de esos sedimentos depositados a esos esfuerzos.

Sin embargo, las modelizaciones de la erosión con el parámetro q constante por etapas constituyen el método numérico más preciso disponible para evaluar β_∞ y c_β (ver figuras 12 y 13). Las simulaciones han permitido la evaluación de $c_\beta=0.667$.

En régimen estacionario terminal para los parámetros α y β , una función $\beta_\infty=-0.5 \times q\alpha$ es compatible con las condiciones de frontera en el fondo y en la superficie. Los resultados obtenidos del modelo numérico 1DV con erosión por etapas muestran una fuerte correlación entre β_∞ y $q\alpha$, pero la función precedente es válida solamente para los valores de $q\alpha$ inferiores a 0.1 (ver figura 14). La función retenida es la siguiente:

$$\beta_\infty = \begin{cases} -0.50 \times (q\alpha) & , \text{ si : } q\alpha < 0.10 \\ -0.72 \times (q\alpha)^{1.15} & , \text{ si : } q\alpha > 0.10 \end{cases} \quad (35)$$

En el transcurso de este trabajo de investigación se ha constatado que en ciertos casos, sobre todo con erosión, los resultados del modelo numérico 1DV con $N=20$, son menos precisos que los obtenidos del modelo fenomenológico desarrollado en este artículo. Ese problema fue resuelto tomando $N=50$, o $N=100$, en ciertos casos.

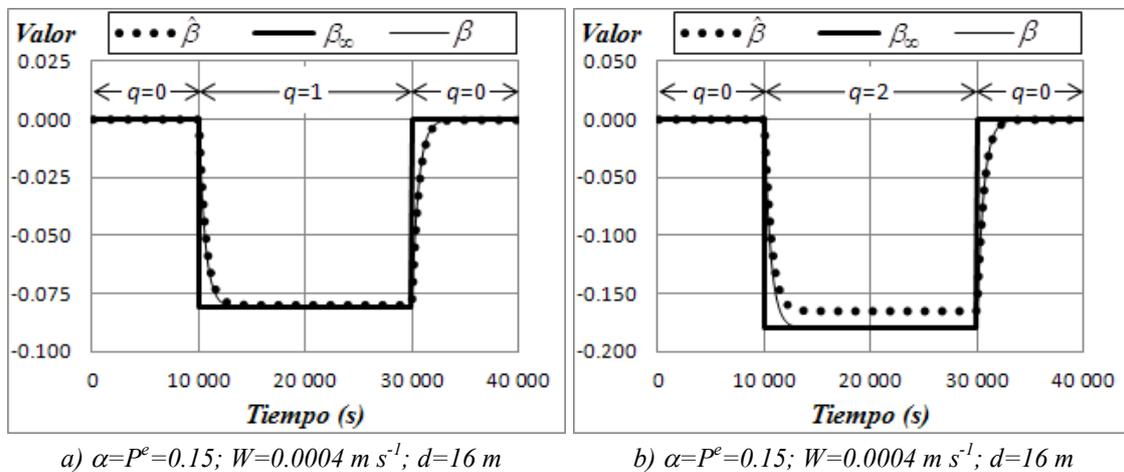
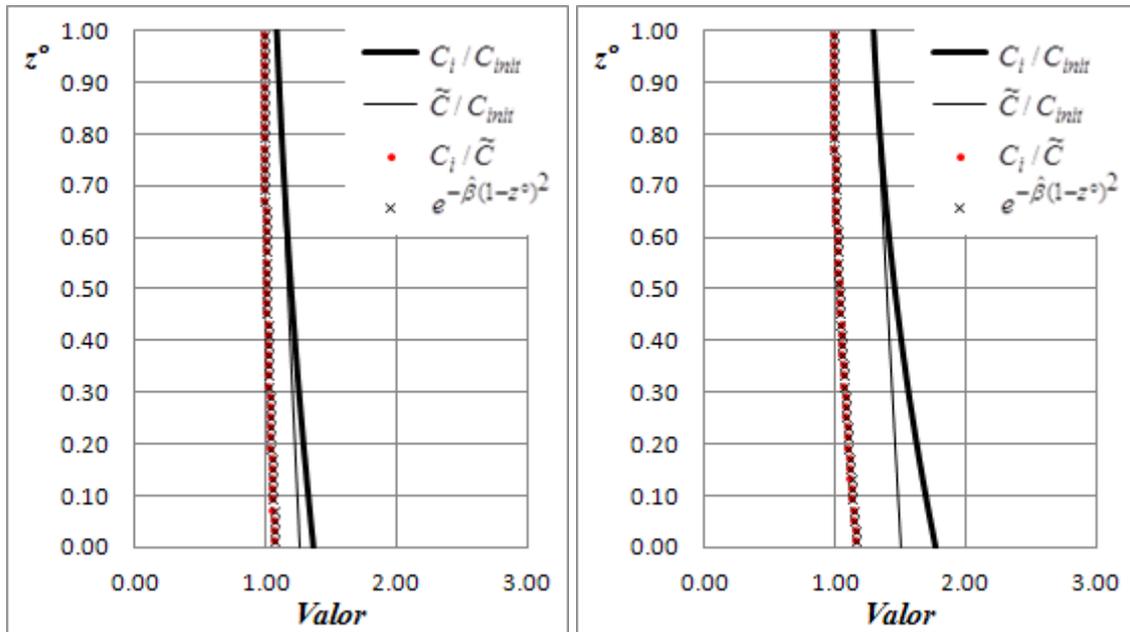


Figura 12. Resultados de las simulaciones numéricas 1DV en régimen no estacionario con erosión, representados por los valores de $\hat{\beta}$. Evolución de $\beta_\infty(q, \alpha)$ según la ley calibrada de ese parámetro y variación de β en acuerdo con el modelo fenomenológico definido por la ecuación 31 resuelta con el método predictor-corrector de Runge-Kutta.

4.2.3 Simulaciones en régimen no estacionario en presencia de depósito y erosión

En esta sección son presentados los resultados obtenidos por las modelizaciones 1DV correspondientes a las simulaciones de la dinámica vertical de las materias en suspensión en régimen no estacionario con erosión y depósito.



a) $\alpha=P^e=0.15$; $q=1$; $W=0.0004 \text{ m s}^{-1}$; $d=16 \text{ m}$ b) $\alpha=P^e=0.15$; $q=2$; $W=0.0004 \text{ m s}^{-1}$; $d=16 \text{ m}$

Figura 13. Resultados de las simulaciones numéricas 1DV en régimen no estacionario con erosión, representados por un perfil de C_i/C_{init} . Perfil instantáneo de \tilde{C}/C_{init} según el modelo fenomenológico sin depósito y sin erosión. Relación C_i/\tilde{C} y función $\hat{G}(z^o) = \exp(-\hat{\beta}(1-z^o)^2)$ calibrada a partir de este último.

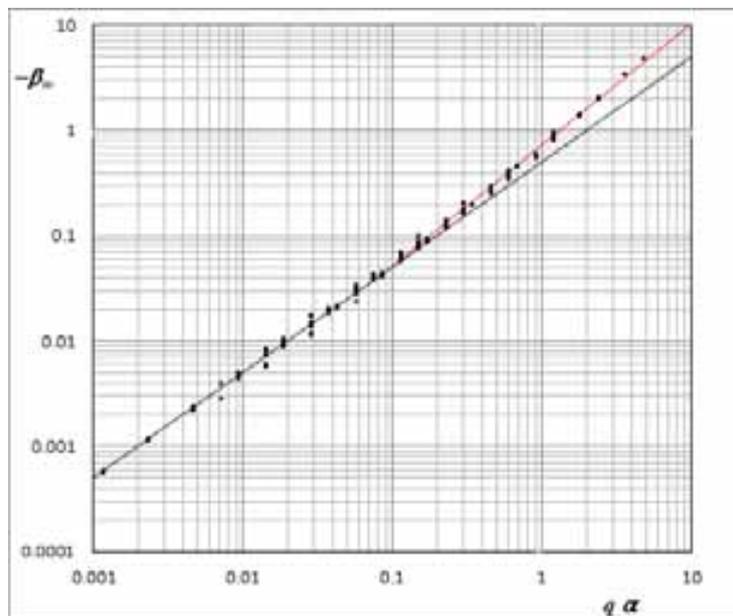


Figura 14. Correlación entre $-\beta_\infty$ y el producto $q \times \alpha$ (596 puntos experimentales). La línea negra corresponde a $\beta_\infty = -0.5(q\alpha)$, y la línea roja a la ley calibrada para valores de $q\alpha$ superiores a 0.10 (ver la ecuación 35).

Estos resultados son comparados con los obtenidos del modelo fenomenológico desarrollado en este artículo. Los resultados de dos simulaciones numéricas son presentados en lo que sigue. Esas simulaciones son designadas Caso 1 y Caso 2.

Los valores de las variables del problema del Caso 1 estudiado son presentados en la tabla 1. Esos valores impuestos implican un valor relativamente elevado del número adimensional ($U_{c-moy} \times T/d$), si bien que en ausencia de los fenómenos de depósito y de erosión, el régimen sedimentario sería casi estacionario (ver ecuación 25).

Los resultados del modelo 1DV, presentados en la figura 15, muestran, en coherencia con los resultados del modelo fenomenológico, que los parámetros adimensionales de este último son casi estacionarios. Se constata que en todo momento los parámetros α y β son cercanos de sus valores terminales instantáneos respectivos α_∞ y β_∞ .

Durante los intervalos de tiempo en los que el perfil vertical de la concentración no es afectado por los intercambios con el fondo (erosión y depósito), se constata que la señal $\hat{\alpha}$ obtenida a partir de los resultados de las modelizaciones numéricas 1DV, es bien aproximada por la señal del modelo fenomenológico $\alpha \approx \tilde{\alpha}$. En presencia de depósito y de erosión las señales α y $\hat{\alpha}$ divergen debido a una modificación de la forma del perfil vertical de la concentración, en comparación con su forma sin depósito y sin erosión.

Durante los intervalos de tiempo en los que la dinámica sedimentaria es afectada por la erosión o por el depósito, la modificación de la forma del perfil vertical de la concentración es controlada por el parámetro β . Un muy buen acuerdo entre β y $\hat{\beta}$ implica que la precisión de los resultados del modelo fenomenológico es excelente en este caso estudiado.

En vista de caracterizar la precisión global del modelo fenomenológico, se han calculado los errores relativos en el fondo ($z^\circ=0$) como sigue:

$$e(z^\circ=0) = \frac{C(z^\circ=0)}{C_i(z^\circ=0)} - 1 = \frac{C_R \exp(-\beta)}{C_{i=1-1/2}(z^\circ=0)} - 1 = \frac{C_R \exp(-\beta)}{1.5 C_{i=1} - 0.5 C_{i=2}} - 1 \quad (37)$$

Estando dado que la concentración media sobre la vertical es:

$$\bar{C} = \int_0^1 C_i dz^\circ \approx \int_0^1 C dz^\circ = \int_0^1 C_R \exp(-\alpha z^\circ) \exp(-\beta(1-z^\circ)^2) dz^\circ \quad (38)$$

El valor de C_R ha sido calculado por:

$$C_R = \frac{\sum_{i=1}^N C_i \Delta z^\circ}{\sum_{i=1}^N \exp(-\alpha z^\circ_i) \exp(-\beta(1-z^\circ_i)^2) \Delta z^\circ} \quad (39)$$

Se constata que la señal de $e(0)$ comporta valores de punta relacionados con el principio y el fin intempestivos de los fenómenos de erosión y de depósito. Además, los cálculos muestran que los valores extremos de $|e(z^\circ=0)|$ son inferiores a 0.006 lo que confirma la muy buena calidad de los resultados del modelo fenomenológico en este caso.

Tabla 1. Valores de las variables del problema que definen el Caso 1 estudiado.

Variable	Símbolo y valor
Profundidad	$d = 2.00 \text{ m}$
Velocidad de caída	$W = 0.0002 \text{ m s}^{-1}$
Valor media de la velocidad de fricción	$U_{c\text{-moy}} = 0.04 \text{ m s}^{-1}$
Período de la señal U_c	$T = 22320 \text{ s}$
Amplitud relativa de la señal U_c	$Ampl=0.80$
Condición crítica de depósito	$U_c \text{ (crítica de depósito)} = 0.50 \times U_{c\text{-moy}}$
Parámetro de la ley de depósito de Krone	$p = 0.50$
Condición crítica de erosión	$U_c \text{ (crítica de erosión)} = 1.70 \times U_{c\text{-moy}}$
Tasa adimensional de erosión efectiva	$E^{ef} / (W \times \overline{C_{init}}) = 1.00$

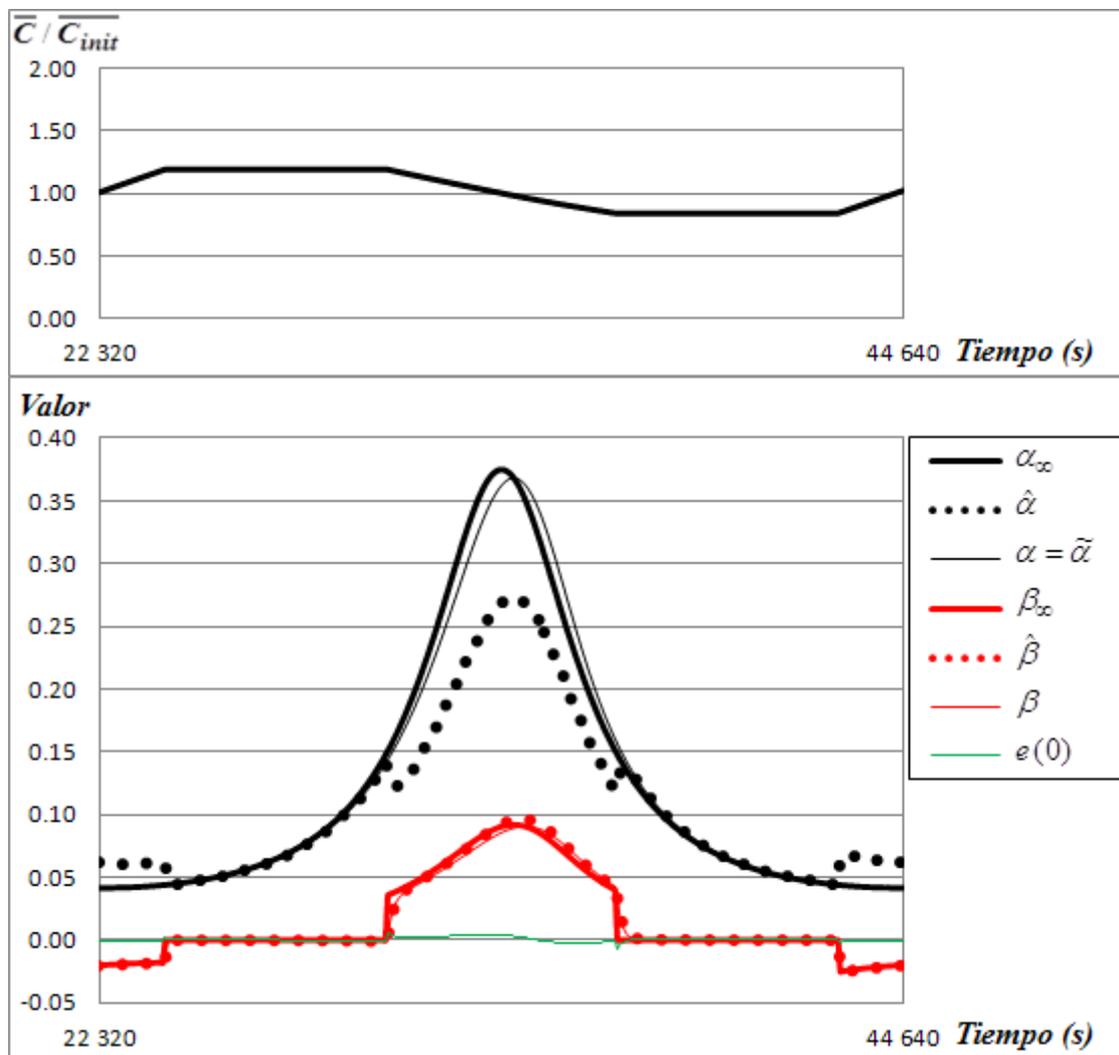


Figura 15. Resultados de las simulaciones correspondientes al Caso 1 estudiado definido por los valores de las variables indicados en la tabla 1. La figura presenta la variación con el tiempo de la concentración media sobre la vertical y de parámetros del modelo fenomenológico que describe el perfil vertical de la concentración.

Description non stationnaire de la distribution verticale des sédiments transportés en suspension par les écoulements à surface libre, en présence de dépôt et d'érosion : 9.51

Los valores de las variables del problema relativos al Caso 2 estudiado son reagrupados en la tabla 2 y los resultados correspondientes en la figura 16. Se observa que los valores de α y α_∞ son en general diferentes, pero casi idénticos cuando los valores de $\alpha_\infty = P^e$ son pequeños. Los valores de β son cercanos de los de β_∞ durante las etapas de erosión que coinciden con un valor pequeño de P^e , mientras que durante las etapas de depósito, cuando P^e alcanza sus valores máximos, los valores de β y β_∞ son en general diferentes.

En síntesis, en este Caso 2 estudiado, los parámetros adimensionales del modelo fenomenológico se aproximan de sus valores terminales teóricos cuando los valores de P^e son pequeños, lo que corresponde a valores grandes de U_c , que es la magnitud que controla las transferencias de masa verticales debidas a la turbulencia.

Los valores extremos de $e(0)$ son más importantes que en el Caso 1. En efecto, en valor absoluto el error relativo alcanza un valor máximo de 0.10, lo que nos parece bien aceptable.

La figura 17 presenta perfiles verticales de la concentración dividida por la concentración inicial de las modelizaciones. Cuatro secuencias de perfiles correspondientes a cuatro ventanas de observación son mostradas. Los instantes t_0 de esas ventanas son definidos por:

- Principio del período de depósito.
- Fin del período de depósito.
- Principio del período de erosión.
- Fin del período de erosión.

De una manera general, hay un acuerdo muy bueno entre los resultados numéricos del modelo teórico 1DV y los correspondientes al modelo fenomenológico. En todos los casos estudiados, una buena convergencia de este último es verificada, a pesar de que durante el período que sigue el principio del depósito se constata un ligero retardo en la convergencia del modelo fenomenológico a proximidad del fondo.

Tabla 2. Valores de las variables del problema que definen el Caso 2 estudiado.

Variable	Símbolo y valor
Profundidad	$d = 8.00 \text{ m}$
Velocidad de caída	$W = 0.0012 \text{ m s}^{-1}$
Valor media de la velocidad de fricción	$U_{c\text{-moy}} = 0.04 \text{ m s}^{-1}$
Período de la señal U_c	$T = 22320 \text{ s}$
Amplitud relativa de la señal U_c	$Ampl = 0.80$
Condición crítica de depósito	$U_c \text{ (crítica de depósito)} = 0.50 \times U_{c\text{-moy}}$
Parámetro de la ley de depósito de Krone	$p = 1.00$
Condición crítica de erosión	$U_c \text{ (crítica de erosión)} = 1.70 \times U_{c\text{-moy}}$
Tasa adimensional de erosión efectiva	$E^{ef} / (W \times \overline{C_{init}}) = 2.50$

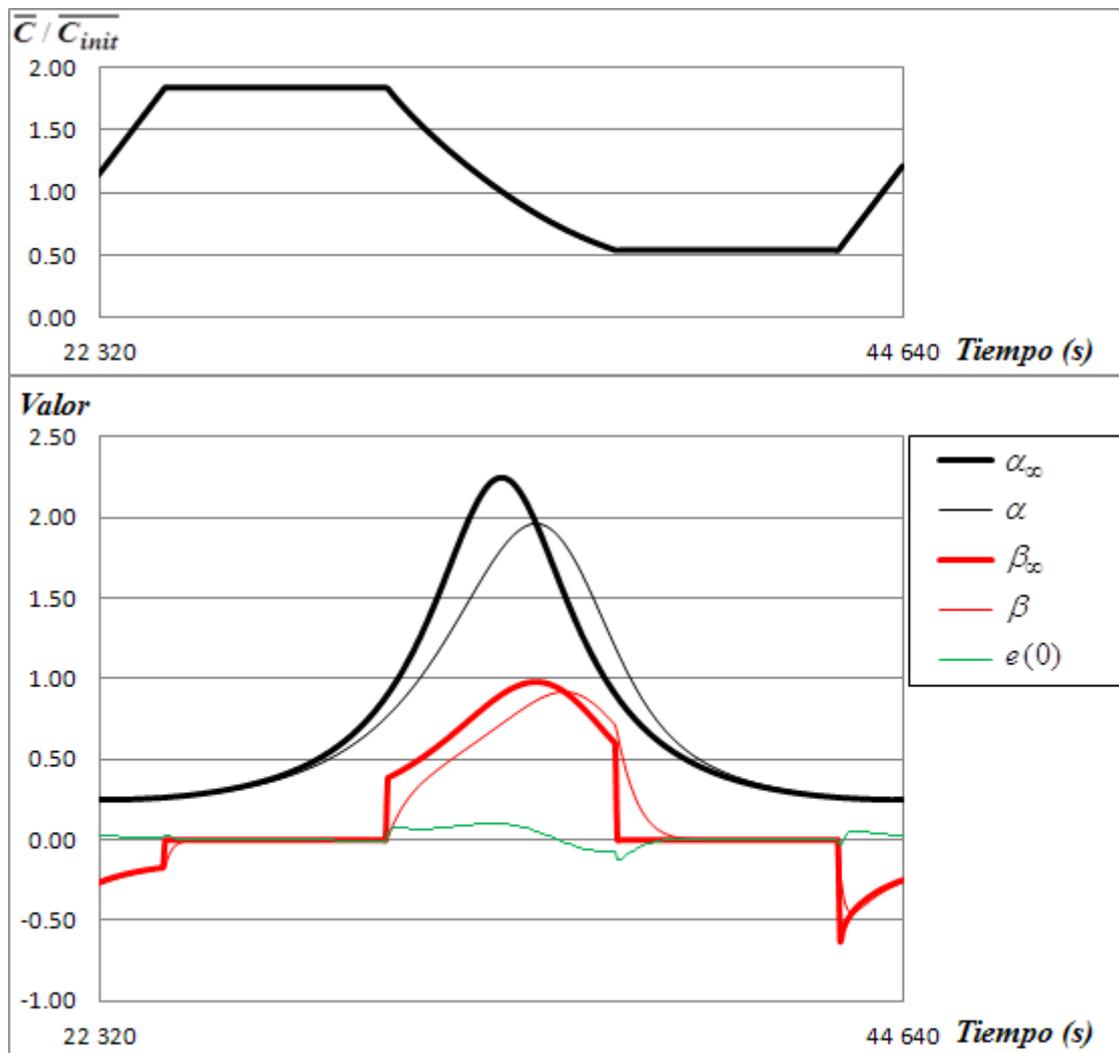


Figura 16. Resultados de las simulaciones correspondientes al Caso 2 estudiado definido por los valores de las variables indicados en la tabla 2. La figura presenta la variación con el tiempo de la concentración media sobre la vertical y de parámetros del modelo fenomenológico que describe el perfil vertical de la concentración.

5. Síntesis del modelo fenomenológico de convección y difusión de las materias en suspensión en un flujo

En los flujos con superficie libre como los estudiados en este artículo, las materias en suspensión son transportadas horizontalmente por la corriente. En esas condiciones, los modelos fenomenológicos desarrollados para los parámetros alfa y beta deben aplicarse siguiendo el movimiento horizontal de los sedimentos. En coordenadas de Euler esto implica la necesidad de incluir un término de convección horizontal en las ecuaciones del modelo.

Description non stationnaire de la distribution verticale des sédiments transportés en suspension par les écoulements à surface libre, en présence de dépôt et d'érosion : 9.53

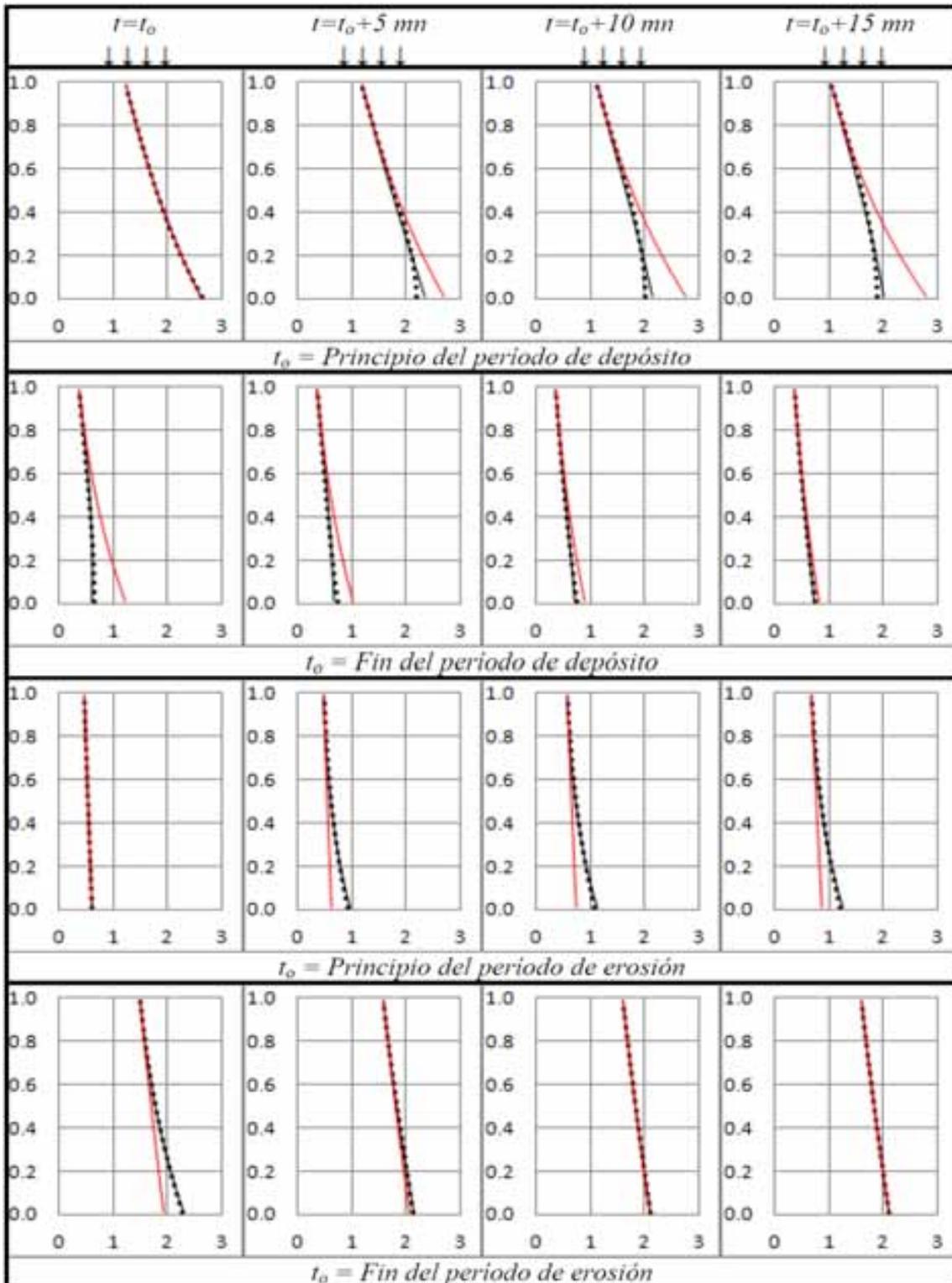


Figura 17. Concentraciones divididas por la concentración inicial en abscisas, en función de z° en ordenadas. En puntos negros: resultados numéricos del modelo IDV. En línea negra: resultados del modelo fenomenológico. En línea roja: ley exponencial teniendo alfa como único parámetro adimensional.

Las ecuaciones finales retenidas para el modelo 2DH de transporte de sedimentos en suspensión por un flujo son presentadas enseguida. En primer lugar la ecuación de transporte gobernando la concentración media sobre la vertical \bar{C} :

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{V}_x \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \bar{V}_y \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{K}_x \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{K}_y \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right) + \frac{E^{ef} - D^{ef}}{d} \quad (40)$$

donde \bar{V}_x y \bar{V}_y son las componentes de la velocidad media sobre la vertical según las direcciones Ox y Oy respectivamente.

El perfil vertical de la concentración es descrito por la ecuación 27:

$$C(z^o) = C_R \exp(-\alpha z^o) \exp(-\beta(1 - z^o)^2)$$

De acuerdo con la ecuación 38, la concentración de referencia del perfil C_R es asociada a \bar{C} por:

$$\bar{C} = C_R \int_0^1 \exp(-\alpha z^o) \exp(-\beta(1 - z^o)^2) dz^o$$

La concentración en el fondo C_0 , cuyo valor sirve para calcular la tasa de sedimentación efectiva D^{ef} , es relacionado con C_R por:

$$C_0 = C_R \exp(-\beta)$$

El parámetro $\alpha = \tilde{\alpha}$, según la ecuación 24 considerando la convección horizontal, es gobernado por:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \bar{V}_x \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \bar{V}_y \frac{\partial \alpha}{\partial y} = c_\alpha \frac{U_c}{d} (\alpha_\infty - \alpha) \quad (40A)$$

donde $\alpha_\infty = P^e$ es el valor terminal del parámetro α en régimen estacionario y $c_\alpha \approx 0,667$ un coeficiente del modelo. Tomando en cuenta la convección horizontal en la ecuación 31, se obtiene la expresión que rige el parámetro β :

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + \bar{V}_x \frac{\partial \beta}{\partial x} + \bar{V}_y \frac{\partial \beta}{\partial y} = c_\beta \frac{U_c}{d} (\beta_\infty - \beta) \quad (40B)$$

donde β_∞ es el valor terminal del parámetro β , que depende de los intercambios sólidos entre el fondo y la columna de agua caracterizados por D^{ef} y E^{ef} .

En caso de depósito efectivo ($D^{ef} > 0$; $E^{ef} = 0$):

$$\beta_\infty = 0.50 p \alpha \quad , y: \quad c_\beta = 0.667 + 0.3 \times \beta$$

En caso de erosión efectiva ($D^{ef} = 0$; $E^{ef} > 0$):

$$\beta_\infty = \begin{cases} -0.50 \times (q\alpha) & , si: \quad q\alpha < 0.10 \\ -0.72 \times (q\alpha)^{1.15} & , si: \quad q\alpha > 0.10 \end{cases} \quad , et: \quad c_\beta = 0.667$$

En caso de intercambios efectivos nulos entre el fondo y el flujo ($D^{ef} = 0$; $E^{ef} = 0$):

$$\beta_\infty = 0 \quad , y: \quad c_\beta = 0.667$$

5.1 Modelo de convección y difusión vertical de dos ecuaciones

Este modelo debe ser utilizado cuando α y β son en general diferentes de α_∞ y β_∞ , respectivamente.

Si las acciones hidrodinámicas caracterizadas por $|U_c|$ tienen una periodicidad T , este caso corresponde a un número adimensional $(U_{c-moy} \times T/d) \ll 500$. Los parámetros adimensionales del modelo deben ser simulados por las ecuaciones 40A y 40B. Los resultados obtenidos son entonces fiables en todo momento.

5.2 Modelo de convección y difusión vertical de una ecuación

En ciertos problemas se tiene en todo instante $\beta \approx \beta_{\infty}$, mientras que en general $\alpha \neq \alpha_{\infty}$. En esos casos se retiene $\beta = \beta_{\infty}$, pero α , que está en desfase sobre α_{∞} , debe ser modelizado con la ecuación 40A. El hecho de retener $\beta = \beta_{\infty}$ puede provocar algunos errores significativos durante intervalos de tiempo cortos siguiendo el fin de los períodos de depósito y de erosión (ver figuras 15 y 16). Ese caso corresponde a $(U_{c-moy} \times T/d) \approx 500$

5.3 Modelo de convección y difusión vertical de cero ecuaciones

En este caso se admite el carácter estacionario de los parámetros α y β . Se retiene entonces $\alpha = \alpha_{\infty}$ y $\beta = \beta_{\infty}$. Este caso corresponde a $(U_{c-moy} \times T/d) \gg 500$ y períodos muy cortos o inexistentes con pequeños valores de U_c . Los resultados obtenidos para C_0/\bar{C} son entonces muy cercanos de los calculados con la formulación de TEETER (1986), (ecuación 14) y prácticamente idénticos para valores de p cercanos a 1.

6. Conclusiones

El estudio de las formas de los perfiles verticales de la concentración permite de emitir dos conclusiones generales independientes del modelo fenomenológico desarrollado en este artículo:

- En régimen sedimentario estacionario, las soluciones analíticas o por integración numérica de las ecuaciones que gobiernan el problema, permiten la descripción de los perfiles de C/C_0 por una función $F(z^{\circ}; \alpha_{\infty})$ que define la ecuación general de esos perfiles, en la cual α_{∞} es un parámetro adimensional que depende de la relación W/U_c .

En régimen no estacionario, cuando condiciones sin depósito y sin erosión son impuestas en las modelizaciones, en todo momento los perfiles de C/C_0 convergen hacia $F(z^{\circ}; \alpha_{\infty})$. A pesar de que la convergencia real sea más rápida en el fondo y en la superficie que en el resto de la columna de agua, en la mayoría de los casos los perfiles de C/C_0 son suficientemente bien modelizados por la misma función $F(z^{\circ}; \alpha)$, con el valor del parámetro α que tiende en permanencia hacia el valor instantáneo de α_{∞} . Según esas mismas modelizaciones, la única desviación significativa de esta ecuación general del perfil de C/C_0 es observada cuando el desfase entre las señales $\alpha(t)$ y $\alpha_{\infty}(t)$ es importante, para valores de U_c que tienden hacia cero ($(W/U_c) \rightarrow \infty$) para los cuales, tomando como referencia la ecuación general del perfil de C/C_0 , una sobreacumulación de sedimentos en las capas de la columna de agua situadas cerca del fondo es provocada por la ecuación de transporte 1DV que gobierna la dinámica

vertical de las materias en suspensión. Esta sobreacumulación desaparece cuando el valor de U_c aumenta. Esta desviación del perfil, de su forma general, es en gran parte un efecto artificial de las modelizaciones porque en esas condiciones el depósito debe producirse.

- Con depósito o erosión, si las variables independientes del problema (U_c , W y d) permanecen constantes y si los intercambios sólidos con el fondo son proporcionales al producto de la velocidad de caída de los sedimentos por la concentración en el fondo (parámetros p y q constantes), las modelizaciones 1DV muestran que el perfil de la relación $C/F(z^\circ; \alpha)$ tiende en permanencia hacia una forma terminal que permanece semejante enseguida.

Si esas condiciones persisten durante un tiempo suficiente, una forma terminal definida por $G(z^\circ; \beta_\infty)$ es alcanzada. Se observa así un carácter estacionario del parámetro β_∞ de suerte que los perfiles de C pueden ser modelizados por una función $C_R \times F(z^\circ; \alpha) \times G(z^\circ; \beta_\infty)$, donde $F(z^\circ; \alpha)$ es la función que describe el perfil C/C_0 en régimen no estacionario sin depósito y sin erosión. Si el valor terminal no es alcanzado por β el perfil de C no es descrito exactamente por $C_R \times F(z^\circ; \alpha) \times G(z^\circ; \beta)$, pero esta expresión constituye sin embargo una aproximación satisfactoria del perfil.

Los principales resultados numéricos de este estudio han sido obtenidos con un coeficiente de difusión turbulenta K_z independiente de z . La misma metodología puede ser aplicada para K_z dependiente de z , lo que implica una eventual modificación de las funciones $F(z^\circ; \alpha)$ y $G(z^\circ; \beta)$ (ver apéndice 1).

Para K_z constante sobre toda la vertical, las funciones utilizadas son $F(z^\circ; \alpha) = \exp(-\alpha z^\circ)$ y $G(z^\circ; \beta) = \exp(-\beta(1-z^\circ)^2)$. El valor terminal del parámetro α es $\alpha_\infty = P^e$ y el de β es, o una función $\beta_\infty(p, \alpha) = 0.5 p \alpha$, en caso de depósito, o una función $\beta_\infty(q, \alpha)$ en caso de erosión (ecuación 35). Según el modelo fenomenológico desarrollado en este artículo, las variaciones de α y de β , son simuladas por las ecuaciones 40A y 40B respectivamente. En ese modelo α y β convergen uniformemente sobre toda la columna de agua hacia α_∞ y β_∞ respectivamente, lo que es una aproximación del problema estando dado que la convergencia real es más rápida en el fondo y en la superficie que en el resto de la columna de agua.

La mejor validación del modelo fenomenológico es su capacidad mostrada de reproducir la dinámica vertical de las materias en suspensión con resultados muy cercanos de los obtenidos por las soluciones numéricas de las ecuaciones teóricas 1DV con una discretización de la columna de agua que utiliza al menos 50 capas.

En las aplicaciones a casos reales, los errores propios al modelo fenomenológico son aceptables si la erosión y el depósito están bien caracterizados. En cambio, si para condiciones de depósito se impone $p=0$, los valores de los errores relativos alcanzan en las modelizaciones efectuadas en este estudio, un valor de 0.40 cuando $(U_{c-moy} \times T/d) \approx 7$ y $P^e = 12$ (ver figura 5b). Este error es en gran parte un artefacto de las modelizaciones porque en ese caso extremo, las condiciones de depósito son muy acentuadas.

En la medida en que el modelo fenomenológico se aproxima de la solución teórica del problema, las dos conclusiones siguientes sobre el comportamiento sedimentario reflejan una realidad, al menos en promedio sobre la columna de agua:

- Según este modelo el valor de α tiende en permanencia hacia P^e . Sin erosión y sin depósito, cuando $\alpha \approx P^e$ el perfil vertical de la concentración está en condiciones cercanas a las de equilibrio estacionario sobre toda la columna de agua. Si las variables independientes del problema (U_c , W y d) permanecen constantes, la duración necesaria para alcanzar este equilibrio puede ser caracterizada por una constante de tiempo $\tau_\alpha = d/(c_\alpha \times U_c)$, de suerte que después de un tiempo $t = 4,6 \times \tau_\alpha$ se tendrá: $(\alpha_\infty - \alpha) = (\alpha_\infty - \alpha_{init})/100$, donde α_{init} designa el valor inicial de ese parámetro (en $t=0$).

Esa expresión de la constante de tiempo se justifica por el hecho de que para alcanzar las condiciones de equilibrio, los sedimentos deben redistribuirse sobre toda la altitud d de la columna de agua y la velocidad de las transferencias verticales de mezcla de los sedimentos es caracterizada por U_c .

- El parámetro adimensional β del modelo está vinculado con los efectos de los intercambios sólidos con el fondo, sobre el perfil vertical de la concentración. Después de un período de depósito o de erosión, cuando los intercambios sólidos con el fondo cesan, el valor de β tiende hacia cero a medida que los sedimentos se redistribuyen en la columna de agua acercándose de condiciones sedimentarias estacionarias o no estacionarias sin depósito y sin erosión. Si las variables independientes del problema son constantes y si p o q permanece constante en caso de depósito o de erosión respectivamente, la duración necesaria para que β alcance su valor terminal β_∞ es caracterizada por una constante de tiempo $\tau_\beta = d/(c_\beta \times U_c)$.

Se debe indicar que este trabajo de investigación se desarrolló en vista de aplicarse al estudio de sedimentos finos, sin embargo, los resultados se aplican a todos los materiales transportados en suspensión por los flujos de agua bajo condición que las variables del problema sean bien caracterizadas.

En conclusión final, se puede afirmar que el modelo fenomenológico desarrollado en este artículo para describir el perfil vertical de la concentración en los modelos hidrosedimentarias 2DH permite mejorar considerablemente la precisión y la calidad de las informaciones que pueden ser obtenidas de esas modelizaciones.

7 Apéndices

7.1 Apéndice 1: Soluciones analíticas para el perfil vertical de la concentración de las materias en suspensión en un flujo con superficie libre

Si el régimen sedimentario es estacionario y uniforme (sin erosión y sin depósito) la integración de la ecuación 8 permite la obtención de la ley de Rouse-Vanoni

generalizada para la distribución vertical de las materias en suspensión en régimen estacionario (ORTON & KINEKE, 2001; SANCHEZ *et al.*, 2005), a saber:

$$C(z)|_{stat} = C_0 \exp\left(-\int_0^z \frac{W}{K_z} dz\right)$$

La solución de esta ecuación depende de las formulaciones retenidas para modelizar W y K_z . En este estudio se ha retenido W y K_z constantes, lo que ha permitido la obtención de la ecuación 10.

Otra solución, debida a ROUSE (1937), es obtenida suponiendo W constante y el coeficiente de difusión turbulenta K_z modelizado por:

$$K_z = \kappa U_c z (1 - z^0)$$

La solución que es válida para $z \geq a$, es obtenida sabiendo que:

$$\int_a^z \frac{dz}{K_z} = \frac{1}{\kappa U_c} \ln \left[\frac{z(d-a)}{a(d-z)} \right]$$

en consecuencia se puede escribir:

$$C(z)|_{stat} = C_a \exp\left(-\frac{W}{\kappa U_c} \ln \left[\frac{z(d-a)}{a(d-z)} \right]\right) = C_a \left[\frac{a(d-z)}{z(d-a)} \right]^{W/(\kappa U_c)}$$

donde C_a es la concentración de referencia en el nivel $z=a$ cercano al fondo. La evaluación de la relación C_a/\bar{C} a partir de esta expresión es muy sensible al valor retenido para a , el cual según ciertos autores es igual a $0.05 \times d$, pero según otros autores éste es del mismo orden de magnitud que el valor de la rugosidad del fondo.

De una manera más general, si K_z es una función de z y si W varía en función de la concentración local C según una ley de potencia que puede ser escrita como sigue:

$$W = W_0 \left(\frac{C}{C_0} \right)^{1/r}$$

donde W_0 es el valor de la velocidad de caída asociado con la concentración en el fondo C_0 , y r una constante, entonces, el perfil vertical de la concentración es regido por:

$$C(z)|_{stat} = C_0 \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_z} \right)^r$$

con $\lambda_0 = r/W_0$, y λ_z que está dado por:

$$\lambda_z = \lambda_0 + \int_0^z \frac{dz}{K_z}$$

Estas tres últimas expresiones permanecen validas, si, de un punto de vista semejante al adoptado para clasificar el diámetro de los granos de arena en los estudios granulométricos, la velocidad de caída es distribuida según una ley gamma de parámetros r y λ_z (SANCHEZ, 2006).

7.2 Apéndice 2: Relación entre la concentración en el fondo y la concentración media sobre la vertical en función de los parámetros adimensionales del modelo fenomenológico descriptivo del perfil vertical de las materias en suspensión

Según las ecuaciones 27 y 38 se puede escribir:

$$\frac{C_0}{\bar{C}} = \frac{\exp(-\beta)}{\int_0^1 \exp(-\alpha z^\circ) \exp(-\beta(1-z^\circ)^2) dz^\circ}$$

Esta expresión admite una solución analítica para $\beta=0$ y puede ser evaluada con la ayuda de tablas de integración de la ley normal de Gauss para $\beta=0.5\alpha$. Sin embargo, en general, esta ecuación debe ser calculada por integración numérica utilizando la expresión siguiente:

$$\frac{C_0}{\bar{C}} = \frac{\exp(-\beta)}{\sum_{i=1}^N \exp(-\alpha z_i^\circ) \exp(-\beta(1-z_i^\circ)^2) \Delta z^\circ}$$

La figura 18 muestra C_0/\bar{C} en función de β/α para varios valores de α .

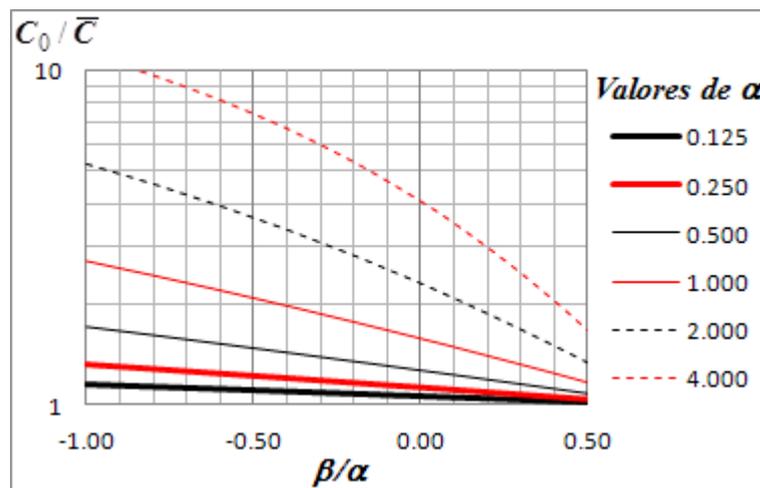


Figura 18. Variación de C_0/\bar{C} en función de β/α para varios valores de α en conformidad con el modelo fenomenológico desarrollado en este artículo para describir el perfil vertical de las materias en suspensión.

8. Referencias bibliográficas

BELINSKY M., RUBIN H., AGNON Y., KIT E., ATKINSON J.F. (2005). *Characteristics of resuspension, settling and diffusion of particulate matter in a water column*. Environmental. Fluid Mechanics, Vol. 5, pp 415-441. doi:10.1007/s10652-004-7302-3

KRONE R.B. (1986). *The significance of aggregate properties to transport processes*. In A.J. Mehta (Ed.), *Estuarine cohesive sediment dynamics*, Coastal and estuarine studies n° 14 (pp. 66–84). Springer, Berlin. doi:10.1007/978-1-4612-4936-8_4

LUMBORG U., WINDELIN A. (2003). *Hydrography and cohesive sediment modelling: application to Rømø Dyb tidal area*. Journal of Marine Systems, Vol. 38, pp 287–303. doi:10.1016/S0924-7963(02)00247-6

MEHTA A.J. (1986). *Characterization of cohesive sediment properties and transport processes in estuaries*. In A.J. Mehta (Ed.), Estuarine cohesive sediment dynamics, Coastal and estuarine studies n° 14 (pp. 290–325). Springer, Berlin.

doi:10.1007/978-1-4612-4936-8_15

ORTON P.M., KINEKE G.C. (2001). *Comparing calculated and observed vertical suspended-sediment distributions from a Hudson River estuary turbidity maximum*. Estuarine, Coastal and Shelf Science, Vol. 52, pp 401–410. doi:10.1006/ecss.2000.0747

ROUSE H. (1937). *Modern conceptions of the mechanics of fluid turbulence*. Transactions of the American Society of Civil Engineers, Vol. 102, pp 463–541.

SANCHEZ M. (2006). *Settling velocity of the suspended sediment in three high-energy environments*. Ocean Engineering, Vol. 33 (5-6), pp 665-678.

doi:10.1016/j.oceaneng.2005.05.009

SANCHEZ M., GRIMIGNI P., DELANOË Y. (2005). *Steady-state vertical distribution of cohesive sediments in a flow*. Comptes Rendus Geoscience, Vol. 337, pp 357–365.

doi:10.1016/j.crte.2004.10.020

TEETER A.M. (1986). *Vertical transport in fine-grained suspension and newly-deposited sediment*. In A.J. Mehta (Ed.), Estuarine cohesive sediment dynamics, Coastal and estuarine studies n° 14 (pp. 170–191). Springer, Berlin. doi:10.1007/978-1-4612-4936-8_9

Nota complementaria al manuscrito referenciado DOI:10.5150/revue-paralia.2013.009

Nota sometida el 19 de octubre de 2015, aceptada el 6 de noviembre de 2015, en línea el 9 de noviembre de 2015.

Resultados de simulaciones numéricas publicados parcialmente por SANCHEZ (2014), muestran que en caso de erosión el parámetro β_∞ puede ser relacionado al producto $q\alpha$ con una expresión única que satisface la condición de frontera relativa a los intercambios de sedimentos con el fondo:

$$\beta_\infty = -0,50 q\alpha \quad , \text{ para todo valor de } q\alpha \quad (\text{Eq. 35 modificada})$$

En caso de depósito ($D^{ef} > 0$) en este artículo el coeficiente c_β ha sido asociado a β por la ecuación 32. Esto en base a resultados de simulaciones numéricas efectuadas con $\beta = \beta_\infty$. Cuando $\beta \neq \beta_\infty$ los resultados obtenidos se mejoran si el coeficiente c_β es relacionado con β_∞ mediante la ecuación 32 modificada como sigue (ver SANCHEZ, 2014):

$$c_\beta = \begin{cases} 0,667 + 0,3 \times \beta_\infty & , \text{ si: } D^{ef} > 0 \\ 0,667 & , \text{ si: } D^{ef} = 0 \end{cases} \quad (\text{Eq. 32 modificada})$$

Referencia bibliográfica :

SANCHEZ M. (2014). *Distribution non stationnaire des matières en suspension dans une couche limite oscillant à haute fréquence*. XIII^{ème} Journées Nationales Génie Côtier – Génie Civil, Dunkerque, pp 495-504. doi:10.5150/jngcgc.2014.054