



Approximation du profil d'élévation de surface libre à partir de la mesure de vitesse orbitale près du fond

Thomas GUÉRIN ¹

1. WAELES MARINE Consultants, 53 rue du Commandant Groix, 29200 Brest, France.
thomas.guerin@wm-consultants.fr

Résumé :

Dans le but de prendre en compte de manière consistante les paramètres d'élévation de surface libre et de vitesse orbitale près du fond en présence de vagues potentiellement fortement non-linéaires, ces variables hydrodynamiques étant (directement ou indirectement) très souvent utilisées en génie côtier, ce travail présente une méthode vague-à-vague d'approximation du profil d'élévation de surface à partir de la vitesse orbitale mesurée près du fond (composante horizontale). Appliquée aux données de canal à houle issues du projet GLOBEX (RUESSINK *et al.*, 2013), l'approche proposée, basée principalement sur les travaux de ABREU *et al.*, (2010), permet de corriger significativement la tendance à la sous-estimation des hauteurs de vagues individuelles estimées suivant la théorie linéaire à partir de l'amplitude de la vitesse orbitale mesurée, tout en fournissant à l'échelle d'un cycle orbital une expression analytique du profil d'élévation intégrant asymétries horizontale et verticale.

Mots-clés :

Vagues, Vitesse orbitale, Elévation de surface libre, Non-linéarité, Approche vague-à-vague, Approche analytique, GLOBEX.

1. Introduction

D'un point de vue eulérien, la connaissance du profil d'élévation de surface libre associé au passage d'une vague apparaît souvent essentielle dans le domaine du génie côtier. Disposer de ce profil d'élévation ($\zeta(t)$), ainsi que du profil de vitesse orbitale près du fond associé ($u_b(t)$), permet en effet d'appréhender de nombreuses problématiques nécessitant de connaître a minima les paramètres de hauteur de vague et d'amplitude de vitesse orbitale (e.g. dimensionnement d'ouvrages, calcul d'efforts hydrodynamiques, de contrainte de cisaillement au fond, ...). En première approche la théorie linéaire est encore couramment employée pour cela (tel que dans le Guide Enrochement du CETMEF (2009) par exemple), alors même que les conditions dimensionnantes à considérer sont souvent associées à la présence de vagues fortement non-linéaires (i.e. cas peu profond et vagues cambrées à déferlées). Prendre en compte de manière consistante ces caractéristiques hydrodynamiques nécessite donc d'opter pour une approche non-linéaire. Disposant plus facilement (ou directement) de la mesure de $u_b(t)$ que de $\zeta(t)$ la plupart du temps, une

Thème 1 – Hydrodynamique marine et côtière

méthode permettant d'approximer $\zeta(t)$ à partir d'une mesure de $u_b(t)$ d'un point de vue vague-à-vague est proposée ici. Ce travail est directement inspiré des travaux de ABREU *et al.*, (2010) et de RUESSINK *et al.* (2012) proposant d'approximer $u_b(t)$ à partir des paramètres de vague locaux, mais inverse le problème en se plaçant dans le cas où la vitesse orbitale près du fond est connue (i.e. mesurée) tandis que les caractéristiques de surface sont inconnues.

2. Méthode

La méthode développée ici est principalement basée sur l'expression analytique proposée par ABREU *et al.*, (2010) pour approximer le profil temporel de vitesse orbitale près du fond (composante horizontale u_b) :

$$u_b(t) = U_w \sqrt{1 - r^2} \left[\frac{\sin(\omega t) + \frac{r \sin \phi}{1 + \sqrt{1 - r^2}}}{1 - r \cos(\omega t + \phi)} \right] \quad (1)$$

où U_w est l'amplitude associée à $u_b(t)$ pour un cycle orbital de période T , $\omega = 2\pi/T$ est la fréquence angulaire, et introduisant les paramètres $r \in [0, 1[$ et $\phi \in [-\pi/2, 0]$ caractérisant conjointement le degré de non-linéarité du profil incluant asymétrie horizontale (*wave skewness*) et verticale (*wave asymmetry*).

2.1 Etape 1 : calcul de r et ϕ à partir de $u_{b,mes}(t)$

Partant d'une série temporelle de vitesse orbitale mesurée en un point fixe près du fond (point de vue eulérien) et notée $u_{b,mes}(t)$, notre première étape consiste à ajuster « automatiquement » ce profil mesuré suivant l'équation (1) et ceci pour chaque cycle orbital de la série temporelle. Pour cela un couple de paramètres (r , ϕ) est obtenu en résolvant le système d'équations (2)-(3) suivant :

$$U_{w,mes} f \left[\frac{\sin(\omega t_{c,mes}) + \frac{r \sin \phi}{1 + f}}{1 - r \cos(\omega t_{c,mes} + \phi)} \right] - u_{b,c,mes} = 0 \quad (2)$$

$$U_{w,mes} f \left[\frac{\sin(\omega t_{t,mes}) + \frac{r \sin \phi}{1 + f}}{1 - r \cos(\omega t_{t,mes} + \phi)} \right] - u_{b,t,mes} = 0 \quad (3)$$

où les indices c et t correspondent respectivement à la crête (*crest*) et au creux (*trough*) de la vague, et avec $f = \sqrt{1 - r^2}$. Ce système (2)-(3) transcrit le fait que l'on souhaite que la vitesse mesurée au passage de la crête (respectivement du creux) de la vague soit égale à l'expression analytique (1) obtenue en considérant $t = t_{c,mes}$ (respectivement $t = t_{t,mes}$) et l'amplitude mesurée $U_{w,mes} = (u_{b,c,mes} - u_{b,t,mes})/2$.

La méthode de Newton est employée pour résoudre ce système (2)-(3), notamment par analogie avec la *stream function wave theory* telle que traitée par RIENECKER & FENTON (1981) et également considérée en section 2.3 de GUÉRIN & RUESSINK (2021). Pour chaque cycle orbital, le couple (r , ϕ) in fine retenu est celui pour lequel l'erreur globale associée à la résolution du système (2)-(3) (i.e. somme des erreurs sur (2) et (3) en valeur absolue) est minimale après un certain nombre d'itérations (fixé ici à 20).

Il est également important de noter que, l'expression (1) correspondant à une vitesse orbitale de moyenne nulle sur une période de vague, il est nécessaire que cela soit aussi le cas pour $u_{b,mes}(t)$ avant de procéder à la résolution du système (2)-(3) (en soustrayant donc la valeur moyenne de $u_{b,mes}(t)$ obtenue pour chaque cycle orbital).

2.2 Etape 2 : approximation de $\zeta(t)$ à partir de r et ϕ

Une fois le couple (r, ϕ) obtenu pour chaque cycle orbital de la série temporelle $u_{b,mes}(t)$ suivant l'étape 1 décrite précédemment, le profil d'élévation de surface libre associé, noté $\zeta(t)$, est approximé en se basant sur l'analogie entre la formulation en série initialement considérée par ABREU *et al.*, (2010) pour dériver l'expression analytique (1) (formulation détaillée en Annexe A de leur article, où n et r satisfont la relation $r = 2n/(1 + n^2)$) :

$$u_b(t) = U_w \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^j \sin[(j+1)\omega t + j\phi], \quad (4)$$

et l'expression de vitesse orbitale près du fond (ou plus précisément en $z = -h$; h désignant la hauteur d'eau) associée à une houle de Stokes du second ordre :

$$u_{b,St2}(t) = \frac{a\omega}{\sinh(kh)} \left[\cos(\omega t) + \frac{3ak}{4 \sinh^3(kh)} \cos(2\omega t) \right] \quad (5)$$

avec le nombre d'onde k et l'amplitude de vague $a = H/2$, H définissant la hauteur du profil d'élévation (distance crête à creux).

En effet, en notant $U_w = a\omega / \sinh(kh)$ suivant la théorie linéaire et en appliquant la translation temporelle $t' = t - T/4$, l'expression (5) se réécrit :

$$u_{b,St2}(t) = U_w \sum_{j=0}^1 \left(\frac{1}{n_{u,St2}}\right)^j \cos[(j+1)\omega t'] = U_w \sum_{j=0}^1 \left(\frac{1}{n_{u,St2}}\right)^j \sin[(j+1)\omega t + j\phi] \quad (6)$$

avec $1/n_{u,St2} = 3ak/[4 \sinh^3(kh)]$, et $\phi = -\pi/2$.

De manière similaire à la vitesse orbitale, l'expression de l'élévation de surface associée à une houle de Stokes du second ordre peut alors s'écrire :

$$\zeta_{St2}(t) = a \sum_{j=0}^1 \left(\frac{1}{n_{\zeta,St2}}\right)^j \sin[(j+1)\omega t + j\phi] \quad (7)$$

où $\phi = -\pi/2$ et $1/n_{\zeta,St2} = ak \cosh(kh) [2 + \cosh(2kh)]/[4 \sinh^3(kh)]$.

Dans le but de « retomber » in fine au sein du cadre proposé par ABREU *et al.*, (2010) [AB10] tout en raisonnant par analogie avec l'expression (7), on cherche une expression de l'élévation de surface que l'on note $\zeta_{AB10}(t)$ et qui soit fonction d'un paramètre $n_{\zeta,AB10}$. Sachant que le paramètre n introduit en équation (4), que l'on renomme ici $n_{u,AB10}$ par consistance, est connu puisque se déduisant du paramètre r obtenu en étape 1, on pose l'égalité des rapports $n_{\zeta,AB10}/n_{u,AB10} = n_{\zeta,St2}/n_{u,St2}$, d'où :

$$n_{\zeta,AB10} = \left(\frac{n_{\zeta,St2}}{n_{u,St2}}\right) n_{u,AB10} = \frac{3n_{u,AB10}}{\cosh(kh)[2 + \cosh(2kh)]} \quad (8)$$

Thème 1 – Hydrodynamique marine et côtière

Enfin, en se basant sur les expressions (I.5)-(I.6) de l'Annexe A de ABREU *et al.*, (2010), la formulation suivante est proposée pour $\zeta_{AB10}(t)$:

$$\zeta_{AB10}(t) = an_{\zeta,AB10} \left[\frac{n_{\zeta,AB10} \sin(\omega t) + \sin \phi}{1 + n_{\zeta,AB10}^2 - 2n_{\zeta,AB10} \cos(\omega t + \phi)} \right] \quad (9)$$

où $n_{\zeta,AB10}$ est donc calculé suivant l'expression (8) tandis que l'amplitude « linéaire » a est déduite de la mesure de l'amplitude de vitesse orbitale, i.e. $a = U_{w,mes} T_{mes} \sinh(kh) / (2\pi)$, avec k estimé suivant la théorie linéaire (en première approche) et où la hauteur d'eau h est supposée connue.

3. Application aux données GLOBEX

La méthode décrite en section précédente est testée ici en exploitant les données de laboratoire issues du projet GLOBEX (RUESSINK *et al.*, 2013), où différentes conditions de vagues ont été propagées au sein d'un canal à houle de 100 m de long caractérisé côté « mer » par la présence d'un fond plat définissant une hauteur d'eau de 0.85 m, suivi d'une pente uniforme de 1/80 rejoignant le côté « terre ». La première série de vagues aléatoires est considérée ici (série A1), caractérisée par une hauteur significative (H_s) et une période pic (T_p) de 10 cm et 1.6 s (correspondant à $H_s = 2$ m et $T_p = 7$ s à l'échelle 1:1), et un facteur d'amplification du pic d'énergie (ou facteur « JONSWAP ») de 3.3. Seules les 5 premières minutes de la série sont considérées, celles-ci suffisant amplement pour tester la méthode puisque fournissant au moins ~200 cycles orbitaux en appliquant une fonction de type *zero-crossing* à la vitesse orbitale mesurée sur l'ensemble des 22 courantomètres situés suffisamment près du fond, depuis la zone de levée des vagues jusqu'au bord.

3.1 Résultats de l'étape 1

Un exemple de résultat obtenu à l'issue de l'étape 1 est présenté en Figure 1, la localisation *cross-shore* du point de mesure associé correspondant à la position moyenne du point de déferlement pour cette série de vagues aléatoires. Les valeurs du couple de paramètres (r, ϕ) indiquées en légende de figure, permettant de tracer le profil suivant l'expression (1) et que l'on renomme ici $u_{b,AB10}(t)$, sont donc automatiquement fournies par la résolution du système d'équations (2)-(3) prenant en compte les 4 données d'entrée suivantes : $u_{b,c,mes}$ et $u_{b,t,mes}$ (repérées par les pointillés noirs sur la figure, et d'où $U_{w,mes}$ est déduit), ainsi que $t_{c,mes}$ et $t_{t,mes}$. A titre indicatif, le profil de vitesse orbitale obtenu suivant la théorie linéaire à partir des mesures de période (T_{mes}) et d'amplitude ($U_{w,mes}$) est également superposé sur la figure. On précise ici que le décalage en temps du profil mesuré par rapport aux deux autres (i.e. suivant l'axe des abscisses) est simplement dû au fait que le « t_0 » du profil mesuré (associé à la fonction de *zero-crossing*) n'est pas le même que celui associé à l'expression (1) puisque, suivant cette expression, $u_b(t_0) \neq 0$ pour r et $\phi \neq 0$. Une translation temporelle est donc nécessaire pour comparer de manière

consistante les deux profils, de sorte que le t_0 du profil mesuré coïncide avec la valeur de t pour laquelle $u_{b,AB10}(t) = 0$ (valeur *up-crossing*).

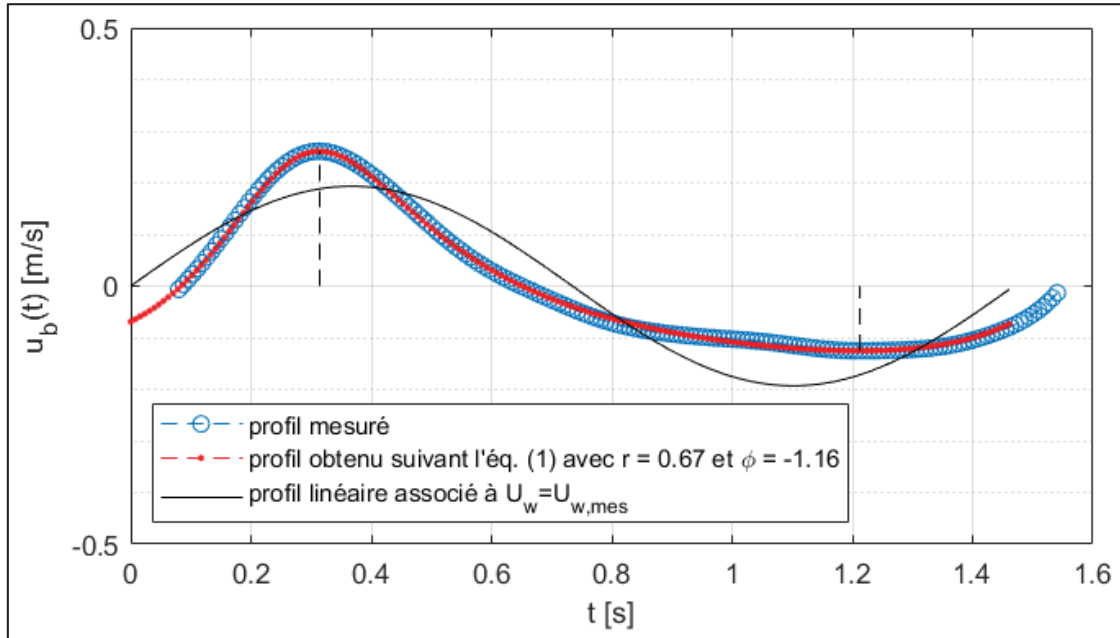


Figure 1. Exemple de comparaison entre profil de vitesse orbitale mesurée près du fond et profil obtenu suivant l'équation (1) où r et ϕ sont obtenus par la résolution du système d'équations (2)-(3). Le profil « linéaire » associé à $U_w = U_{w,mes}$ est ajouté à titre indicatif, tandis que les barres verticales (pointillés noirs) indiquent la position temporelle associée à $t = t_{c,mes}$ et $t = t_{t,mes}$.

3.2 Résultats de l'étape 2

En Figure 2 sont présentés les profils d'élévation de surface libre associés aux profils de vitesse orbitale visibles en Figure 1. Comme détaillé en section 2.2, le profil « prédit » est obtenu suivant l'expression (9) avec dans ce cas précis une valeur de $n_{\zeta,AB10} = 1.84$, calculé suivant l'équation (8) avec $r = 0.67$ et une hauteur d'eau h de 0.15 m. Il est intéressant de noter que par analogie avec le paramètre r associé à $u_b(t)$, que l'on renomme ici r_u , on peut obtenir un paramètre r_ζ relatif à $\zeta(t)$, au moyen de la relation $r = 2n/(1 + n^2)$ introduite par ABREU *et al.*, (2010). Dans le cas de l'exemple présenté ici on obtient $r_\zeta = 2(1.84)/(1 + 1.84^2) = 0.84$, que l'on peut comparer à la valeur de $r_u = 0.67$ et donc synonyme d'une augmentation du degré de non-linéarité lorsque l'on passe du profil de vitesse orbitale près du fond au profil d'élévation de surface (sachant que le paramètre ϕ reste quant à lui inchangé). A noter que la translation temporelle considérée pour comparer correctement le profil d'élévation mesurée avec le profil analytique est la même que celle appliquée au profil de vitesse orbitale et décrite en section précédente.

Thème 1 – Hydrodynamique marine et côtière

Conjointement à une estimation cohérente des paramètres de non-linéarité (r_ζ, ϕ) au vu de l'accord global constaté entre la forme des profils d'élévation mesurée et prédite pour l'exemple de cycle orbital considéré ici, un très bon accord est obtenu entre hauteur de vague mesurée et prédite (i.e. 7.47 cm vs 7.45 cm, respectivement). A titre de comparaison, une sous-estimation significative de la hauteur de vague est obtenue à partir de $U_{w,mes}$ selon la théorie linéaire pour ce cycle orbital (i.e. 5.25 cm, soit une erreur normalisée de $\sim 30\%$).

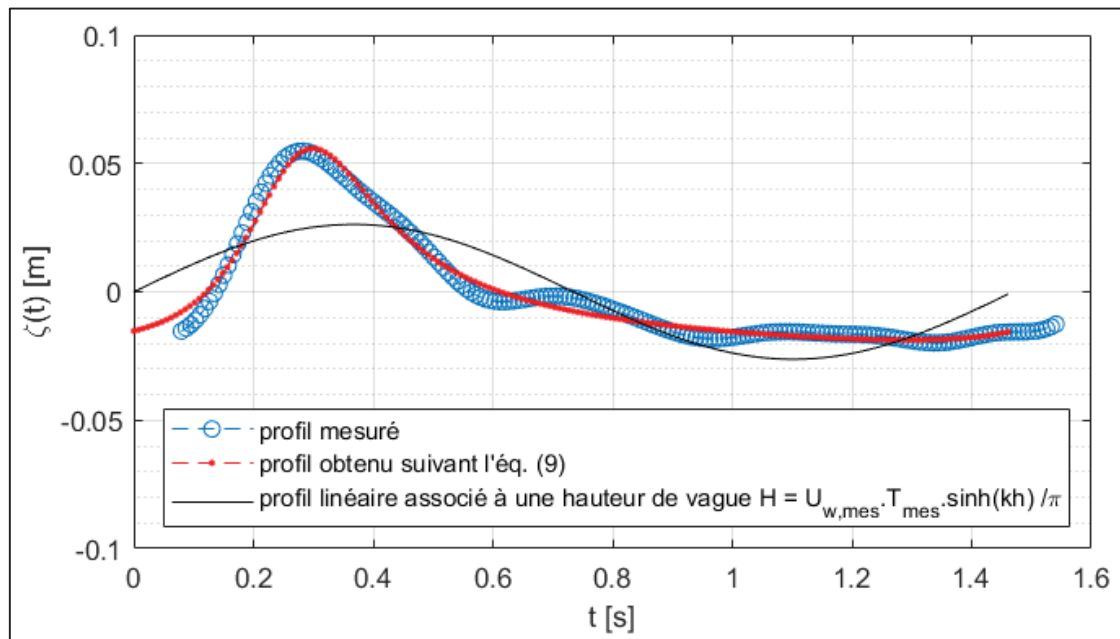


Figure 2. Comparaison entre la mesure d'élévation de surface libre associée à la mesure de vitesse orbitale visible en Figure 1, et le profil d'élévation obtenu suivant l'équation (9). Le profil « linéaire » associé à une hauteur de vague calculée à partir de $U_{w,mes}$ suivant la théorie linéaire est ajouté à titre indicatif.

4. Discussion et conclusion

En même temps qu'une bonne évaluation des degrés de non-linéarité caractérisant respectivement la vitesse orbitale mesurée près du fond et l'élévation de surface via le calcul des paramètres (r_u, r_ζ, ϕ) pour un cycle orbital donné, la hauteur de vague associée prédite représente in fine la « donnée de sortie » principale de l'approche non-linéaire présentée ici. En effet, conjointement avec le paramètre de période de vague (obtenu ici directement par la mesure), le paramètre de hauteur de vague intervient directement ou indirectement dans la plupart des études relatives au génie côtier, que cela soit pour du dimensionnement d'ouvrages, du calcul d'efforts hydrodynamiques, de débits franchissants, des statistiques de conditions de vagues en zone peu profonde, etc. Dans ces études le recours à la théorie linéaire est encore parfois considéré pour obtenir des valeurs de vitesse orbitale et hauteur de vague associée, ces dernières étant ensuite

utilisées en tant que données d'entrée pour divers calculs de dimensionnement ou autre. Or la limite d'applicabilité d'une telle approche est souvent (largement) dépassée lorsque l'on se situe en domaine côtier et que les vagues à considérer sont potentiellement fortement non-linéaires (vagues dimensionnantes tout du moins). Ceci est en partie illustré en Figure 3 ci-dessous où les hauteurs de vague prédites suivant l'approche non-linéaire présentée ici et l'approche linéaire classique (i.e. à partir de $U_{w,mes}$) sont comparées aux valeurs mesurées pour les conditions GLOBEX considérées (série A1).

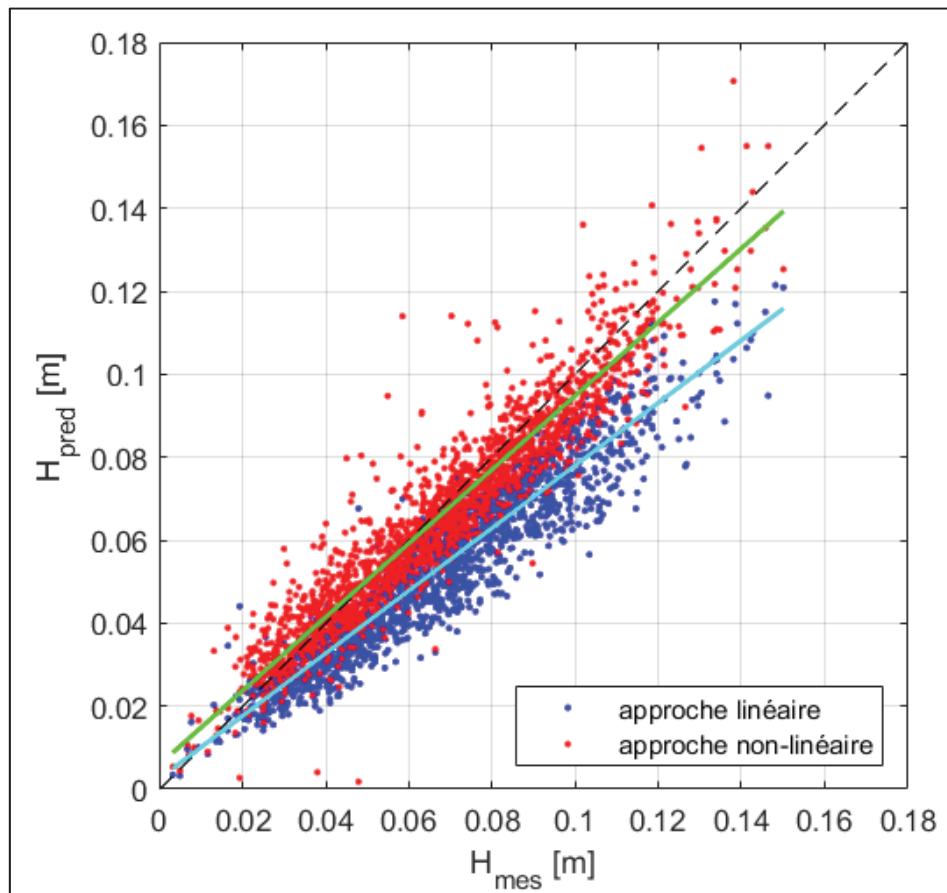


Figure 3. Graphique de dispersion des hauteurs de vague prédites (H_{pred}) à partir de la vitesse orbitale mesurée près du fond suivant l'approche non-linéaire présentée ici (points rouges et droite de régression en vert) et suivant l'approche linéaire classique (points bleus et droite de régression en cyan), pour les 5 premières minutes de la série GLOBEX A1.

Malgré quelques valeurs anormalement basses ou élevées obtenues avec l'approche non-linéaire (cela étant potentiellement lié à certaines limites de l'approche), l'amélioration significative de la hauteur de vague prédite par rapport à l'approche linéaire est mise en évidence. En particulier, plus le degré de non-linéarité des vagues est important, plus l'inconsistance entre élévation de surface et vitesse orbitale près du fond est

Thème 1 – Hydrodynamique marine et côtière

important suivant l'approche linéaire. Une sous-estimation significative de la hauteur de vague est obtenue ici en « partant » de $U_{w,mes}$ (i.e. en considérant une erreur nulle du point de vue de la vitesse orbitale), mais en sens inverse il faut noter qu'une surestimation significative de l'amplitude de vitesse orbitale serait obtenue en partant de la bonne hauteur de vague (i.e. valeur mesurée) comme illustré en Figure 3 de GUÉRIN (2020). L'approche non-linéaire présentée ici tend donc à corriger cette inconsistance, en parallèle de proposer une expression analytique du profil d'élévation de surface libre obtenue à partir de la vitesse orbitale mesurée près du fond et d'un point de vue vague-à-vague.

Remerciements

Sont remerciées toutes les personnes ayant été impliquées dans le projet GLOBEX, soutenu par le *European Community's Seventh Framework Program* au travers du contrat n°261520 de l'*Integrating Activity HYDRALAB IV*. Anouk de Bakker et Gerben Ruessink sont en particulier remerciés pour la mise à disposition des données GLOBEX. La SAS WAELES MARINE CONSULTANTS est vivement remerciée pour le financement de la part d'activité de recherche de l'auteur.

5. Références bibliographiques

ABREU T., SILVA P.A., SANCHO F., TEMPERVILLE A. (2010). *Analytical approximate wave form for asymmetric waves*. Coastal Engineering, 57(7), 656-667. <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2010.02.005>

CETMEF (2009). *Guide Enrochement. L'utilisation des enrochements pour les ouvrages hydrauliques. Version française du Rock Manual*. <https://www.cerema.fr/fr/centre-ressources/boutique/guide-enrochement-utilisation-enrochements-ouvrages>

GUÉRIN T. (2020). *Etude de l'effet de la non-linéarité des vagues sur le setup suivant une approche semi-analytique à phase moyennée*. XVI^{èmes} Journées Génie Côtier Génie Civil (Le Havre), pp 599-608. http://www.paralia.fr/jngcgc/16_07_guerin.pdf

GUÉRIN T., RUESSINK G. (2021). *Can short-wave nonlinearity affect the prediction of wave setup?* Journal of Geophysical Research: Oceans, 126(9), e2021JC017264. <https://doi.org/10.1029/2021JC017264>

RIENECKER M., FENTON J. (1981). *A Fourier approximation method for steady water waves*. Journal of Fluid Mechanics, 104, 119–137. <https://doi.org/10.1017/s0022112081002851>

RUESSINK B.G., RAMAEKERS G., VAN RIJN L.C. (2012). *On the parameterization of the free-stream non-linear wave orbital motion in nearshore morphodynamic models*. Coastal engineering, 65, 56-63. <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2012.03.006>

RUESSINK B.G., MICHALLET H., BONNETON P., MOUAZE D., LARA J., SILVA P.A., WELLENS P. (2013). *Globex: wave dynamics on a gently sloping laboratory beach*. Proceedings of Coastal Dynamics 2013, pp 1351-1362. https://hydrallab.eu/uploads/TAdocuments/170_Ruessink_Gerben.pdf