



Méthode Newton-asymptotique pour la résolution des équations de saint-venant

Sofiane Hadji,

Ingénieur R&D,UTC, Dépt GSM, Compiègne, France

Résumé

Cet article est consacré à une présentation détaillée de deux schémas de résolution non linéaires adaptés à la résolution des systèmes éléments finis des équations de Saint-Venant incompressible. Le premier schéma est la linéarisation de Newton-Raphson, le second est le schéma Newton-Asymptotique. Les relatives performances des deux schémas sont mises en évidence à travers un exemple.

Abstract

In this paper, we present a comparative study of two non-linear schemes for solving finite element systems of Saint-Venant equations. The first scheme is the Newton-Raphson linearisation, the second one is the Newton-Asymptotic method. The relative efficiency of such approaches is evaluated over an example.

Mots-clés: éléments finis, équations de saint-venant, méthodes non linéaires, méthode Newton-Asymptotique.

Keywords: finite element, Saint-Venant equations, non-linear methods, Asymptotic-Newton method.

1.Introduction

Dans cette étude, on s'intéresse à l'évaluation des performances de deux méthodes de linéarisation pour résoudre des problèmes non linéaires appliqués aux équations de Saint-Venant. Une formulation de type Galerkin est choisie pour la discrétisation des relations non-linéaires. La solution du problème est obtenue en faisant un choix adéquat de la méthode de linéarisation. L'inconvénient de la méthode de Newton-Raphson est la factorisation de la matrice tangente à chaque itération. Nous pouvons améliorer le taux de convergence en construisant l'espace solution à travers une représentation asymptotique du résidu sous la forme d'une série limitée à un seul paramètre. Cette approche a été utilisée avec succès pour la résolution des problèmes non-linéaires en calcul de structures sous le nom de méthode Asymptotique-Numérique^{2,3}. Le but de cette étude est de comparer l'efficacité des différentes méthodes de linéarisation de type Newton pour la résolution des problèmes de fluides incompressibles.

2. Modèle mathématique

Les équations de Saint-Venant s'écrivent en coordonnées cartésiennes comme suit:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} - \nu \Delta U - F_x = 0 \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + U \frac{\partial V}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} - \nu \Delta V - F_y = 0 \quad (2.1b)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial HU}{\partial x} + \frac{\partial HV}{\partial y} = 0 \quad (2.1c)$$

où (U, V) représentent les vitesses moyennes sur la hauteur suivant les axes ox, oy , H la hauteur d'eau avec $H(x, y, t) = h(x, y, t) - z(x, y, t)$, z étant la cote du fond, ν la viscosité cinématique du fluide. F_x et F_y intègre aussi bien les forces de volume (Coriolis), que les actions exercées sur le fond (frottement) ou sur la surface libre (vent), ou encore des forces telles que les contraintes de radiations.

2.1. Ecriture variationnelle

Le modèle numérique est construit en introduisant une approximation par éléments finis dans la forme intégrale obtenue par la méthode des résidus pondérés appliquée au système (2.1a-2.1c), les fonctions-test $\delta U, \delta V, \delta h$ étant choisies dans les mêmes espaces fonctionnels que les inconnues U, V et h .

$$I = \int_{\Omega} (\delta U (2.1a) + \delta V (2.1b) + \delta h (2.1c)) d\Omega, \quad \Omega \text{ désigne le domaine d'étude}$$

Après application du théorème de Green aux termes en dérivées secondes (termes de diffusion), ainsi qu'aux termes en dérivées spatiales de l'équation de continuité moyenne, et après regroupement des termes de même nature, la forme intégrale s'écrit :

$$I = I_t + I_u + I_v + I_h + I_g + I_f + I_{un} + I_{ut} + I_Q \quad (2.2)$$

$$I_t = \int_{\Omega} (\delta U \frac{\partial U}{\partial t} + \delta V \frac{\partial V}{\partial t} + \delta h \frac{\partial h}{\partial t}) d\Omega$$

$$I_u = \int_{\Omega} (U \delta U \frac{\partial U}{\partial x} + V \delta U \frac{\partial U}{\partial y} + U \delta V \frac{\partial V}{\partial x} + V \delta V \frac{\partial V}{\partial y}) d\Omega$$

$$I_u = \int_{\Omega} \nu (\frac{\partial \delta U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \delta U}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial \delta V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \delta V}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y}) d\Omega$$

$$I_h = - \int_{\Omega} H (U \frac{\partial \delta h}{\partial x} + V \frac{\partial \delta h}{\partial y}) d\Omega \quad I_g = - \int_{\Omega} g (\delta U \frac{\partial h}{\partial x} + \delta V \frac{\partial h}{\partial y}) d\Omega \quad I_f = \int_{\Omega} \delta U \frac{\partial F_x}{\partial x} + \delta V \frac{\partial F_y}{\partial y} d\Omega$$

$$I_Q = \int_{\partial \Omega} (H U_n \delta h) dS \quad I_{U_n} = - \int_{\partial \Omega} \nu \delta U_n \frac{\partial U_n}{\partial n} dS \quad I_{U_t} = - \int_{\partial \Omega} \nu \delta U_t \frac{\partial U_t}{\partial n} dS$$

où S désigne la frontière du domaine Ω , t son vecteur tangent, n sa normale extérieure, u_t la composante tangentielle de la vitesse moyenne, u_n la composante normale et $\frac{\partial}{\partial n}$ la dérivée dans la direction de la normale.

2.2. Structure matricielle générale

Les formes variationnelles (2.2) discrétisées par éléments finis peuvent s'écrire:

$$W = \langle \partial U \partial V \partial h \rangle ([M]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} - \{F\}) = 0 \quad \forall \quad \partial U, \partial V, \partial h \quad (2.4)$$

Le système à résoudre est alors:

$$[M]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\} \quad (2.5)$$

où $\langle U \rangle$ est le vecteur des variables globales égal à $\langle u_i \ v_i \ h_i \rangle_{i=1, \text{ nbre de noeuds}}$, $[M]$ et $[K]$ sont la matrice masse globale et la matrice de rigidité globale respectivement. $\{F\}$ est le vecteur global des sollicitations extérieures. En utilisant une linéarisation de type Newton ou asymptotique et une discrétisation temporelle de type Euler implicite, le système (2.5) devient:

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (2.6)$$

où $\langle x \rangle$ est le vecteur accroissements des variables égal à $\langle \Delta u_i \ \Delta v_i \ \Delta h_i \rangle_{i=1, \text{ nbre de noeuds}}$, $\{b\}$ le vecteur résidu et $[A]$ la matrice tangente.

3. Méthodes de linéarisation

Les relations aux dérivées partielles associées aux équations de Saint-Venant peuvent s'écrire sous la forme:

$$L(U) + Q(U, U) - F_{\text{ext}} = 0 \quad (3.1)$$

où $Q(U, U)$ et $L(U)$ sont les opérateurs non linéaire et linéaire respectivement. F_{ext} représente les forces extérieures.

La forme variationnelle associée à l'équation (3.1) s'écrit:

$$W_h = W_{hL} + W_{hQ} + W_{h\text{ext}} = 0 \quad \forall \quad \delta u_n, \delta v_n, \delta h_n$$

$$\text{ou } \{R_L(u_n)\} + \{R_Q(u_n, u_n)\} - \{F_n\} = 0 \quad (3.2)$$

$$W_{hL} = \langle \delta u_n \rangle \{R_L(u_n)\}, \quad W_{hQ} = \langle \delta u_n \rangle \{R_Q(u_n, u_n)\} \quad W_{h\text{ext}} = - \langle \delta u_n \rangle \{F_n\}$$

3.1. Méthodes de Newton-Raphson

Pour résoudre le système d'équations non-linéaire (3.2), une étape de linéarisation est nécessaire. En effet, le problème non-linéaire est transformé en une série de problèmes linéaires de manière à ce que le sous espace des solutions linéaires converge vers la solution non-linéaire désirée. Le succès d'une telle stratégie itérative dépend de la construction du problème linéarisé. Il est bien connu que les méthodes de type Newton ont de très bonnes propriétés de convergence si la solution initiale est proche de la solution exacte. Les principales étapes d'une linéarisation de type Newton sont les suivantes:

-La solution $\{U_0\}$ est connue pour un niveau de chargement $\{F_0\}$ qui correspond à un nombre de Reynolds donné

$$\{R_0\} = \{R_L(U_0)\} + \{R_Q(U_0, U_0)\} - \{F_0\} = \{0\} \quad (3.3)$$

-Choisir un niveau de chargement ou un nombre de Reynolds

$$\{F\} = \{F_0\} + a \{F_1\} \quad (3.4)$$

On peut fixer l'amplitude 'a' ou la calculer en utilisant la norme du premier vecteur solution.

-Obtenir la solution en résolvant un certain nombre de problèmes linéaires. L'espace solution est constitué par $\{U^{(1)}\}, \{U^{(2)}\}, \dots, \{U^{(m)}\}$ obtenues par une série de résolution de systèmes linéaires.

On cherche alors la solution $\{U\}$ telle que:

$$\{U\} = \{U_0\} + a_1 \{U^{(1)}\} + a_2 \{U^{(2)}\} + \dots + a_m \{U^{(m)}\} \quad (3.5)$$

$$\{R(U)\} = \left\{ R(U_0 + \sum_{i=1}^m a_i U^{(i)}) \right\} = 0 \quad (3.6)$$

les vecteurs $\{U^{(i)}\}$ sont solutions des problèmes linéaires:

$$[K_T] \{U^{(i)}\} + \{\bar{R}^{(i)}\} = 0 \quad (3.7)$$

conduisant à:

$$\{R(U)\} = \sum ([K_T] \{U^{(i)}\} + \{\bar{R}^{(i)}\}) = \{0\} \quad (3.8)$$

La matrice $[K_T]$ est obtenue par une linéarisation de type Newton pour un $\{U\}$ donné. Le vecteur $\{\bar{R}\}$ peut correspondre à l'expression de $\{R\}$ ou à une représentation asymptotique. Les coefficients a_i représentent soit des paramètres de relaxation soit un développement asymptotique. La relation (3.8) doit être satisfaite de façon à obtenir la solution désirée. Le choix de $[K_T]$ et de $\{\bar{R}\}$ conduit à une série de méthodes présentées dans les sections suivantes. La matrice tangente $[K_T]$ est calculée pour une estimation de la solution $\{U\}$. Ceci est obtenu en discrétisant l'expression de ΔW linéaire en $\{\Delta U\}$:

$$W(U + \Delta U) = W(U) + \Delta W + \dots \text{et } \Delta W_h = \langle \delta u_n \rangle [K_T] \{\Delta U\} \quad (3.9)$$

Si on choisit $a_i = 1$, alors:

$$\{U\} = \{U_0\} + \{U^{(1)}\} + \{U^{(2)}\} + \dots \quad (3.10)$$

$$\left[K_T(U_0 + \sum_{j=1}^{i-1} U^{(j)}) \right] \{U^{(i)}\} = -\{\bar{R}\} \quad \text{avec } \{\bar{R}\} = \left\{ R(U_0 + \sum_{j=1}^{i-1} U^{(j)}) \right\} \quad (3.11)$$

Les vecteurs $\{U^{(1)}\}, \{U^{(2)}\}$ représentent les vecteurs incrémentaux $\{\Delta U\}$ pour chaque itération. L'incrément 'a' de l'équation (3.4) peut être choisi comme suit:

-L'utilisateur définit la valeur de a

-L'utilisateur définit la valeur de la norme s_0 telle que:

$$\| a \cdot U^{(1)} \| = s_0 \quad (3.12)$$

-Ajuster la valeur de 'a' à chaque niveau d'itération pour une norme s_0 donnée basée sur la notion de longueur d'arc⁴.

$$OP_1: \quad \| a \cdot U^{(1)} \| = s_0 \quad (3.13)$$

$$OP_2: \quad \text{Orthogonalisation: } (\Delta a U^{(1)} + U^{(2)}) \cdot U^{(1)} = 0 \quad a = a + \Delta a$$

$$\overline{OP}_2 = OP_1 + (\Delta a U^{(1)} + U^{(2)}) \quad (3.14)$$

$$\text{Ajustement: } OP_2 = (\overline{OP}_2 / |\overline{OP}_2|) s_0$$

$$OP_3: \quad \text{Orthogonalisation: } (\Delta a U^{(1)} + U^{(3)}) \cdot U^{(2)} = 0 \quad a = a + \Delta a$$

$$\overline{OP}_3 = OP_1 + (\Delta a U^{(1)} + U^{(3)}) \quad (3.15)$$

$$\text{Ajustement: } OP_3 = (\overline{OP}_3 / |\overline{OP}_3|) s_0$$

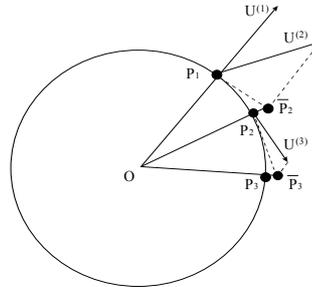


Figure 1: 'a' par la longueur d'arc

- Choix de la norme de convergence ε
- Solution $\{U_0\}$ pour un niveau de chargement F_0
- Choix de la norme de l'incrément 'a'

ITERATION: ITER = 1, 2,, NITER

Calculer $[K_T]$

Calculer $\{R\}$

Résoudre: $[K_T]\{\Delta U\} = \{R\}$

Pour un 'a' fixé:

Solution: 1 - Pour un a fixé:

$$\{U\} = \{U\} + \{\Delta U\}$$

$$2 - \{\Delta U\}$$

$$a = a + \Delta a$$

$$U = OP^{ITER}$$

Calculer la norme relative:

$$\| \{\Delta U\} \| / \| \{U\} \|$$

$$\| \{R\} \| / \| a \{F_1\} \|$$

Convergence:

$$\text{Norme} < \varepsilon$$

FIN DE BOUCLE ITER

Figure 2 Algorithme de Newton-Raphson

3.2.Méthode de Newton-Asymptotique

Comme présentée au début de la section (équations 3.6), l'aspect essentiel de toute méthode de linéarisation est le choix de la matrice tangente ou matrice Jacobienne $[K_T]$ et le choix du vecteur résidu $\{\bar{R}\}$ pour chaque itération. Dans la méthode asymptotique^{1,2,5}, nous avons:

- La matrice tangente est calculée une seule fois au début des itérations ou à chaque cycle de chargement. Cette étape est donc identique à celle de la méthode de Newton-Raphson modifiée.

- L'évaluation du vecteur résidu est obtenue d'une manière spéciale qui diffère de celles utilisées par les méthodes de Newton-Raphson ou Newton-Raphson modifié.

Un problème non-linéaire est représenté par une suite de problèmes linéaires. La solution est écrite sous forme de série en fonction d'un paramètre de chargement 'a' :

$$\begin{aligned} \{F\} &= \{F_0\} + a \{F_1\} \\ \{U\} &= \{U_0\} + a \{U^{(1)}\} + a^2 \{U^{(2)}\} + a^3 \{U^{(3)}\} + \dots + a^m \{U^{(m)}\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

L'expression du vecteur résidu devient:

$$\{R(U)\} = \{R_0\} + a \{R^{(1)}\} + a^2 \{R^{(2)}\} + a^3 \{R^{(3)}\} + \dots + a^m \{R^{(m)}\} \quad (3.17)$$

qui conduit à un certain nombre de problèmes linéaires associés à chaque puissance de 'a' :

$$\begin{aligned} \{R_0\} &= \{0\} \\ \{R^{(1)}\} &= [K_{T0}] \{U^{(1)}\} - \{F_1\} = 0 \\ \{R^{(2)}\} &= [K_{T0}] \{U^{(2)}\} + \{\bar{R}^{(2)}\} = 0 \\ \{R^{(m)}\} &= [K_{T0}] \{U^{(m)}\} + \{\bar{R}^{(m)}\} = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

La caractéristique typique de la méthode asymptotique est liée à l'évaluation du vecteur résidu $\{\bar{R}^{(i)}\}$. Le vecteur résidu dans la méthode de Newton correspond à l'expression de W pour une solution estimée $\{U\}$. Pour la méthode asymptotique, le vecteur résidu correspond à l'expression des termes liés à a, a², ..., a^m.

Prenons une équation algébrique non-linéaire à un seul degré de liberté pour expliquer la méthode. Soit l'équation non-linéaire quadratique définie par:

$$\begin{aligned} L(U) + Q(U, U) - F &= 0 \\ \text{ou: } k_0 U + k_1 U^2 - (F_0 + a F_1) &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

supposons que la solution u₀ pour un F₀ donné est connue:

$$R_0 = k_0 U_0 + k_1 U_0^2 - F_0 = 0$$

Pour la méthode Newton-Asymptotique (U_m défini U^(m)), nous avons:

$$\begin{aligned} U &= U_0 + a U^{(1)} + a^2 U^{(2)} + \dots + a^m U^{(m)} \\ F &= F_0 + a F_1 \end{aligned} \quad (3.22)$$

la série de problèmes linéaires est:

$$R = R_0 + a R_1 + a^2 R_2 + \dots + a^m R_m \quad (3.23)$$

- R₀ = k₀ U₀ + k₁ U₀² - F₀ = 0
- R_{1L} = K_{T0} U₁ = 0, $\bar{R}_1 = -F_1$ (identique à N-R Modifiée)
- R_{2L} = K_{T0} U₂ + $\bar{R}_2 = 0$, $\bar{R}_2 = k_1 U_1^2$ (identique à N-R Modifiée)
- R_{3L} = K_{T0} U₃ + $\bar{R}_3 = 0$, $\bar{R}_3 = 2 k_1 U_1 U_2$ (différent de N-R Modifiée)

$$R_{mL} = K_{T0} U_m + \bar{R}_m = 0, \quad \bar{R}_m = k_1 \sum_{j=1}^{m-1} U_j U_{m-1-j} \quad (3.24)$$

3.3.Implémentation de la méthode de Newton-Asymptotique

Pour obtenir la solution asymptotique, nous devons stocker les vecteurs composant l'espace solution de dimension 'm': {U₀}, {U₁}, ..., {U_m}

La matrice tangente pour chaque pas est gardée constante alors que le résidu est calculé à partir de l'équation (3.24). Différentes stratégies peuvent être choisies trouver la solution:

Incrémentation du nombre de Reynolds (ou viscosité):

La solution peut être obtenue en choisissant la viscosité ou les conditions aux limites en vitesses correspondant à un nombre de Reynolds donné en un seul pas. Néanmoins, pour des écoulements compliqués, la solution est obtenue en incrémentant le nombre de Reynolds par petit pas. On peut avoir aux nœuds frontières:

$$u = u_0 + au_1, v = v_0 + av_1 \quad (3.25-a)$$

ou prendre des conditions aux limites en vitesses constantes et faire varier la viscosité:

$$\mu = \mu_0 + a \mu_1, \text{ et obtenir } \bar{R}_1 \quad (3.25-b)$$

Choix du paramètre ‘a’:

Le choix de ‘a’ est contrôlé par la limitation de la taille du premier vecteur {U₁} pour une dimension s₀ donnée:

$$a \| U_1 \| = s_0 \quad (3.26-a)$$

Si la solution {U₀} ne conduit pas à {R₀} = {0}, nous pouvons évaluer {U₁} en utilisant: [K_{T0}]

$$\{U_1\} = \{\bar{R}_1\} + \{R_0 / a\} \quad (3.26-b)$$

et évaluer ‘a’ par:

$$a \| \bar{U}_1 + U_1^{(0)} / a \| = s_0 \quad \{U_1\} = \{\bar{U}_1\} + \{U_1^{(0)} / a\} \quad (3.26-c)$$

La formule suivante, proposée par⁶, permet aussi de calculer ‘a’

$$a = \alpha \left[\frac{\| U_1 \|}{\| U_m \|} \right]^{\left(\frac{1}{m-1} \right)} \quad (3.26-d)$$

m étant la taille de l’espace solution et α un coefficient égal à 0.8

Dimension de l’espace solution:

Le choix du nombre ‘m’ de l’espace solution peut être contrôlé par la norme du résidu. Néanmoins si ‘m’ devient relativement grand, nous pouvons reprendre le processus en actualisant le vecteur initial:

$$\{U\} = \{U_0\} + a \{U_1\} + a^2 \{U_2\} + \dots + a^m \{U_m\}$$

- {U₀} = {0}, s₀: dimension du vecteur ou ‘a’ donné
- Choix de la norme de convergence ε

ISTEP: Re

Incrémenter la viscosité ou les conditions aux limites en vitesses

CYCLE: ICYCLE = 1,....., NCYCLE

- 1 - Calculer [K_{T0}]
- 2 - Factoriser [L][S]

ESPACE SOLUTION: J_m = 1,....., m

1-Calculer le résidu (3.24)

2-Résoudre: [L][S] {U_{Jm}} = - {R_m}

SI (J_m = 1): Calculer ‘a’ (3.26-a ou 3.26-d)

si \| a_m R_m \| < ε, aller à actualiser

FIN BOUCLE J_m

3 - Actualiser {U₀} = {U₀} + a {U₁} + a² {U₂} +.....+ a^m {U_m}

4 - Calculer {R₀}

5 - si \| R₀ \| < ε, ALLER prochain pas

FIN BOUCLE CYCLE

FIN BOUCLE ISTEP

Figure 3. Algorithme de la méthode de Newton-Asymptotique

4.Exemple numérique

Dans cette section, nous comparons les deux méthodes de linéarisation, à savoir Newton-Raphson et la méthode Newton-Asymptotique pour la résolution des équations de Saint-Venant incompressibles pour différentes valeurs de la viscosité. La description du cas est donnée ci-dessous. Tous les calculs ont été effectués sur une machine de type PC de CPU égal à 2.6GHz et 512 Mo de RAM. La matrice tangente non symétrique à été stockée suivant la technique ‘morse’, puis factorisée sous la forme: $[K_T] = [L][S]^7$.

Le cas test représente la courbe de remous. Dans cet exemple, nous imposons un débit à l’entrée et un niveau d’eau à la sortie. Le maillage est composé de 2980 triangles et de 6979 nœuds. La solution obtenue par la méthode de Newton-Raphson est considérée comme solution de référence. Le critère de convergence est tel que : $\| \Delta U \| / \| U \| < 10^{-07}$.

Qualité de la solution:

Les résultats obtenus par la méthode asymptotique sont identiques à ceux trouvés par la méthode de Newton-Raphson. La valeur de la solution pour notre exemple est comparée au point de coordonnées: $x = 1000m$, et $y = 5m$ pour différentes valeurs de la viscosité.

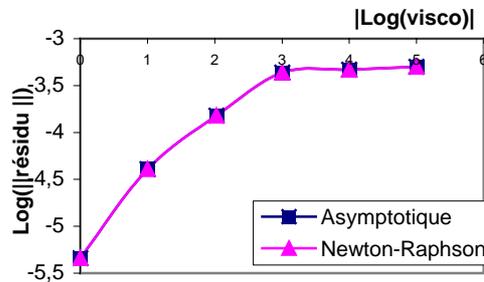


Figure 4.: Vitesse v

Dimension de la base:

Nous montrons ci-après l’influence de la dimension de la base solution sur le taux de convergence de la méthode asymptotique.

Viscosité = 0,000001 m/s²

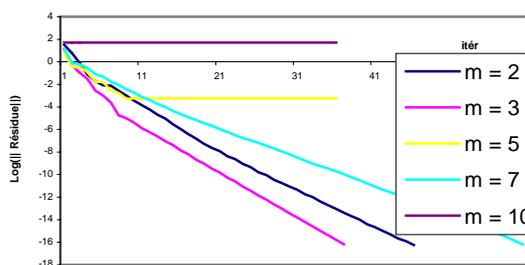


Figure 5. taux de convergence en fonction de la taille de l’espace solution

D’après la courbe ci-dessus, nous remarquons qu’il existe une taille optimale de l’espace solution et qu’au-delà de celle-ci l’algorithme diverge. Pour notre exemple, la meilleure stratégie consiste à prendre un espace solution composé de 3 vecteurs et de relancer automatiquement le calcul avec comme solution initiale celle obtenue par le cycle précédent.

Nombre d’itérations de convergence:

Dans cette partie, on étudie le comportement de la norme du résidu ainsi que le nombre d'itérations de convergence des deux méthodes et ceci pour une viscosité donnée.

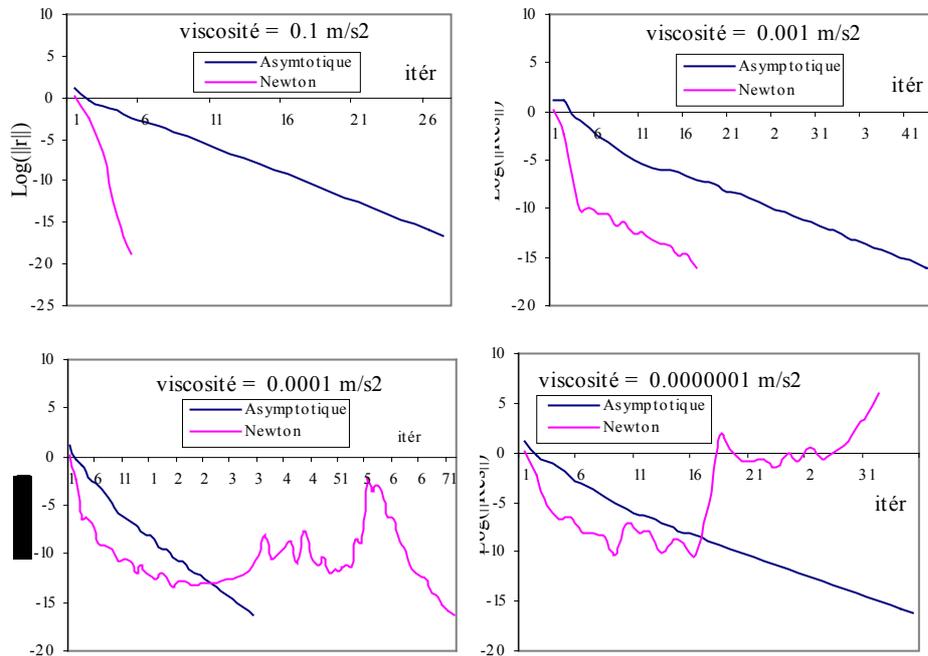


Figure 6. taux de convergence

Nous remarquons clairement dans les courbes ci-dessus que la méthode Newton-Asymptotique converge quelle que soit la viscosité. L'algorithme de Newton-Raphson converge plus rapidement pour les viscosités assez élevées mais par contre diverge quand celles-ci deviennent plus petites.

5. Conclusion

Dans cette étude, nous avons présenté une nouvelle méthode appelée 'Newton-Asymptotique' pour la résolution des équations non-linéaires de Saint-Venant. A été aussi présenté le calcul du résidu pour une taille de l'espace solution donnée pour un cas simple puis généralisé à un problème quelconque de fluide incompressible régi par les équations de Saint-Venant en éléments finis. Nous pouvons considérer que la méthode Newton-Asymptotique est une amélioration de la méthode de Newton-Raphson modifiée. La différence réside essentiellement dans les calculs successifs des vecteurs résidus. Les expérimentations numériques dans cette étude et dans celles présentées dans^{5,8} ont montré que la méthode Newton-Asymptotique peut être considérée comme un outil robuste pour tout code basé sur la linéarisation de type Newton.

6. References

1 Patankar V., (1981). A calculation procedure for two-dimensional elliptic situation. *Numerical Heat Transfer*, **4**, 409-425.

2 Cochelin B., (1994). Méthodes Asymptotiques-Numériques pour le calcul non-linéaire géométrique des structures élastiques. *Habilitation à diriger des recherches, Université de Metz*.

3 Damil N., Potier-Ferry M., (1990). A new method to compute perturbed bifurcations: Application to the buckling of imperfect elastic structures. *Int. J. Engineering Sciences*, **28**, 704-719.

4 Dhatt G., Fafar M., (1995). Mécanique non-linéaire. *Cours IPSI, Paris*.

5 Hadji S., Dhatt G., (1997). Asymptotic-Newton method for solving incompressible flows. *Int. J. Numer. Methods fluids*, **44**, 861-878.

6 Cadou J. M., Potier-Ferry M., Cochelin B., Damil N., (2001). ANM for stationary Navier-Stokes equations and with Petrov-Galerkin formulation. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2001; **50**, 825-845.

7 Dhatt G., Touzot G., (1984). Une présentation de la méthode des éléments finis. *Edition Maloine*.

8 Hadji S., (1995). Méthode de résolution pour les fluides incompressibles. *Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne*.